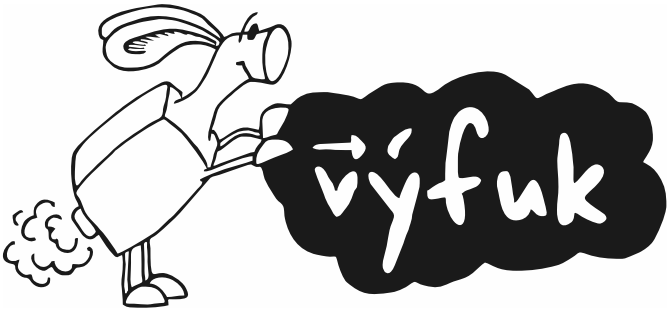


výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

přinášíme vám již třetí brožurku Výfuku. Naleznete v ní zadání 3. série, ve které se budete zabývat ředěním limonády nebo určováním délky pomocí echolokace. V experimentu si potom vyzkoušíte kvalitu svých očí a ve Výfučtení vás čeká téma *Vrhy*.

Kromě zadání zde naleznete i průběžné výsledky po 1. sérii a v obálkách vaše opravená řešení, abyste se mohli podívat, co jste měli správně a co ne, a porovnat je také se vzorovými řešeními 1. série, která jsme zasílali mimořádně i v brožurce minulé. Vzorová řešení pro danou sérii pak najdete, jako už tradičně, v brožurce o dvě série pozdější.

Je za námi Podzimní setkání, fotky si můžete prohlédnout na našem webu.[1] Pokud jste Podzimní setkání nestihli, tak si zapište do diáře, že Jarní setkání se uskuteční od 17. do 19. dubna v Havířově. Kromě setkání chystáme i letní tábor, který proběhne 9. – 22. srpna v Celném. Pozvánku na tábor naleznete rovněž v obálce.

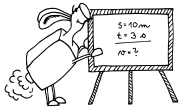
Upozornění: Na závěr bychom se rádi omluvili za tiskovou chybu, která se vloudila do minulé brožurky 2. série. V ní jsme zapomněli graficky odlišit, že 1. úloha je (jako obvykle) určena pouze řešitelům 6. a 7. ročníků, a tak někteří z vás starších taktéž odeslali svá řešení této úlohy, i když jinou cestou. Body jsme vám nemohli započítat v zájmu zachování férovosti soutěže, nicméně i tak vaši píli drobně oceníme a za chybu se ještě jednou omlouváme.

To je od Výfuku pro letošek vše, přejeme vám krásné Vánoce a těšíme se na vás opět v novém roce.

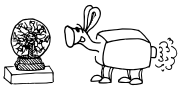
Organizátoři
vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

[1] https://vyfuk.mff.cuni.cz/galerie/setkani_podzim2019

matfyz



Zadání III. série



Termín odeslání: 6. 1. 2020 20.00

Úloha III.1 ... Liščí ohon ❻ ❼

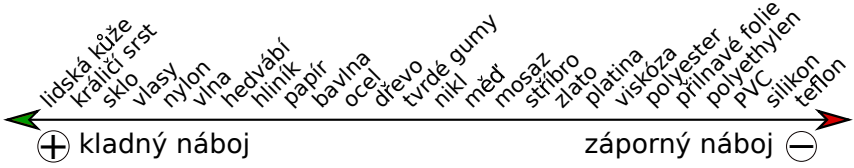
5 bodů

V soutěži kouzelníků zazářilo číslo se statickou elektřinou. Třením plastové (PVC) trubky o vlasy a následným přiložením trubky na plechovku kouzelník onu plechovku nabil záporně – přesunul na ni záporně nabité částice. Potom vzal plechovku jinou, třením nabitou tyč k ní jen zevnitř přiblížil, dotkl se plechovky zvenku prstem, a tak ji nabil kladně.

1. Co by musel kouzelník udělat jinak, kdyby použil skleněnou tyčinku a třel ji o tvrdou gumu?

2. Jakým materiálem by musel třít kus silikonu, aby se po dotknutí silikonem plechovky tato plechovka nabila kladně?

Pomůže vám triboelektrická řada, kde jsou materiály seřazeny podle toho, který „chce“ kladný (nebo záporný) náboj více. Pokud o statické elektřině ještě mnoho nevíte, podívejte se na náš seznam videí: `https://bit.ly/34EE6Zd`.



Obr. 1: Triboelektrická řada

Úloha III.2 ... Limonádový Dan ❻ ❼ ❽ ❾

5 bodů

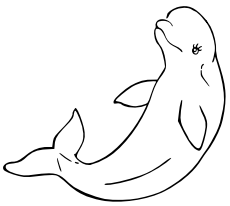
Dan si při sledování svého oblíbeného filmu Limonádový Joe vzpomněl, jak si v létě za deštivého dne koupil svoji oblíbenou Kolalokovu limonádu. Intenzita deště tehdy byla $R = 1\,\mathrm{mm{\cdot}min^{-1}}$ (za minutu dosáhla nově spadlá vrstva nevsáknuté vody výšky jednoho milimetru). Dan má limonádu rád v kelímcích o poloměru $r = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ a nejraději ji upíjí pravidelně každých deset minut.

Kolik limonády musí takto pravidelně upíjet, aby hladina v kelímku zase klesla na úroveň před deseti minutami, tedy mu vlastně neubývala? Jestliže si koupil $V_0 = 3\,\mathrm{dl}$ limonády, která je 50% roztokem chutné složky ve vodě, určete, za jak dlouho nebude Dan chtít limonádu pít. Jeho mez chutnosti pro limonádu (nejnižší hodnota koncentrace, při které mu ještě chutná) je už na $C_\mathrm{h} = 45\,\%$.

Počítejte s tím, že hned po nákupu limonády Dan nejprve čeká deset minut a až pak upije.

Úloha III.3 ... Běluha speleolog ❻ ❼ ❽ ❾

6 bodů



Běluha si při plavbě v moři všimla ve skalní stěně jeskyně, ve které ještě nebyla, a ráda by ji prozkoumala (nedělá jí to problém, protože správná běluha umí plavat i pozpátku).

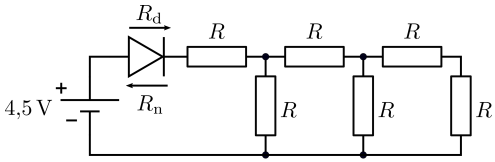
Rozhodla se předtím změřit její délku, a proto společně vyslala dva zvukové signály šířící se rychlostí c. První z nich se odrazil od skalní stěny, druhý od vzdáleného konce jeskyně a oba se vrátily zase zpět. Pokud běluha naměřila hloubku jeskyně l, jaký vnímala časový rozdíl mezi odraženými signály T? Počítejte s $c = 1\,500\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $l = 75\,\mathrm{m}$.

Úloha III.4 ... Obvody s diodou ❻ ❼ ❽ ❾

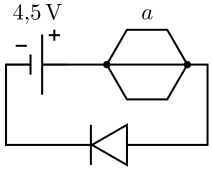
7 bodů

1. Na prvním obrázku vidíme obvod se stejnými odpory $R = 100\,\Omega$ a diodou. Pokud touto diodou prochází proud alespoň $I_\mathrm{d} = 20\,\mathrm{mA}$, rozsvítí se. Dioda má odpor $R_\mathrm{d} = 1\,\Omega$ v povoleném směru proudu (tj. tam, kam ukazuje trojúhelník) a odpor $R_\mathrm{n} = 10\,000\,\Omega$ ve směru opačném.

   - Bude dioda svítit, pokud je napětí na zdroji $U_\mathrm{z} = 4{,}5\,\mathrm{V}$?
   - Pokud bychom diodu zapojili opačně, jaké napětí by muselo být na zdroji, aby dioda svítila?



2. Na druhém obrázku máme jako odpor pravidelný šestiúhelník s úhlopříčkou. Je vyroben z odporového drátu s délkovým odporem $\varrho_l = 1\,\Omega\cdot\mathrm{m^{-1}}$. Jak nejvýše dlouhá může být jeho strana a, aby při připojení ke zdroji o napětí U_z dioda svítila? Uvažujte obě zapojení diody. Odpor vodičů, kterými připojíme zdroj a diodu k šestiúhelníku, zanedbejte.



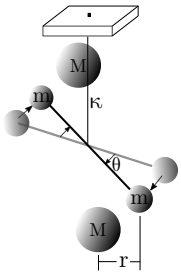
Úloha III.5 ... Jeskyně a jídlo ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Na konci osmnáctého století jeden velice stydlivý muž jménem Henry Cavendish jako první člověk přesněji změřil tzv. gravitační konstantu G, která figuruje[2] v Newtonově gravitačním zákoně.

K měření využil velmi přesné tzv. torzní váhy (viz obrázek), v nichž jsou konce lehkého vodorovného torzního ramena zatížené kuličkami o hmotnosti m. K těmto oběma koncům jsou ve vzdálenosti r přiblíženy *dvě* těžší koule o hmotnostech M. Na obou tak vzniká moment síly daný gravitační přitažlivostí mezi malými a velkými koulemi. Rameno je ve svém těžišti zavěšeno tzv. torzním závěsem, což je kterýkoli pevně ukotvený drát či tyč, který se při otáčení ramena kroutí. Jeho krut vytváří protichůdný moment síly, který je přímo úměrný torzní konstantě vlákna κ a úhlu stočení mezi jeho konci θ (neboli úhlu pootočení celého ramena) v radiánech.

1. Sestavte rovnici pro působící síly/momenty, vyjádřete z nich gravitační konstantu a upravte ji tak, aby fungovala, kdybychom θ měřili ve stupních.

2. Uvažujte, že všechny veličiny až na měřený úhel θ a samotnou konstantu G známe přesně. Nechť $\kappa = 2{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $M = 10\,\mathrm{kg}$, $r = 10\,\mathrm{mm}$ a přibližná hodnota úhlu je $\langle\theta\rangle = 0{,}2°$. Jaká by musela být délka celého ramena L, abychom při 1% relativní nejistotě měření úhlu dosáhli 1% nepřesnosti určení gravitační konstanty?[3] Vztáhněte ji k již známé přesné hodnotě získané jinou metodou: $6{,}674\,3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$.



Obr. 2: Zjednodušené schéma torzních vah

Úloha III.E ... Na vlastní oči ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Jako fyzici se velmi často potřebujeme dívat skrze různé optické přístroje a na všelijaké obrazovky. Na našem mobilním telefonu nás zajímá rozlišení fotoaparátu, a když vezmeme do ruky dalekohled, využijeme jej právě k tomu, abychom rozeznali to, co by jinak nebylo možné. Jeden kvalitní optický přístroj, který máme téměř všichni, jsou naše oči. Jaké je úhlové rozlišení těch vašich?

Pokud nosíte brýle, nasaďte si je a změřte co nejpřesněji úhlové rozlišení vašeho oka. Úhlové rozlišení je nejmenší úhel mezi dvěma světelnými body takový, že je ještě rozeznáme od sebe.

[2] I když se ve škole často setkáte se symbolem kappa (κ), tak ve vědě (a zejména teorii relativity, která se gravitací nejvíce zabývá) se již více používá symbol G.

[3] Pro práci s nejistotami vám může pomoci náš tahák: `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/jak_resit/tahak.pdf`.

Například pokud bychom se dívali na noční oblohu a dvě hvězdy by byly moc blízko sebe, splynuly by nám v jednu. Při jejich postupném oddalování (rozevírání úhlu vycházejícího z našeho oka k nim) bychom je však začali rozeznávat.

Závisí vaše rozlišení na světelných podmínkách?

Úloha III.V ... Bez driblování ❻ ❼ ❽ ❾

7 bodů

1. Při volejbalu hodil Jirka svému kamarádovi vzdálenému 10 m míč na druhou půlku hřiště, ten ho obdržel za dvě pětiny sekundy. Mohl mu v chycení míče zabránit protihráč Aleš, který stál v polovině mezi oběma kamarády a je o 30 cm vyšší než bod, ze kterého Jirka hodil míč?

2. LeBron si ve volném čase házel míčem do koše tak, že vyskočil a házel tak ze stejné výšky jako koš. Protože házel z celé půlky hřiště, divil se mu jeho kamarád Kobe, že má tak přesné ruce, že se pokaždé trefí. Jestliže míč dosáhl maximální výšky 2 m nad košem, jakou největší rychlost do strany může míč mít, aby za dobu letu neuhnul z rovné dráhy o více než 23 cm, což je poloměr koše? V takovém případě by se LeBron již netrefil, ale on se přece trefí vždy.

Poznámka: Dále najdete doprovodný text potřebný k vyřešení úlohy.

Výfučtení: Vrhy

Vrh je pohyb tělesa v gravitačním poli, při kterém na těleso působí jen gravitační síla a odporová síla prostředí. Druhou zmíněnou sílu mnohdy pro jednoduchost zanedbáváme mimo jiné proto, že má při nízkých rychlostech malý vliv. Typicky se bavíme o vrzích v gravitačním poli Země při rychlostech výrazně menších než první kosmická rychlost. Tím, že zanedbáme odporové síly prostředí (na Zemi se obvykle jedná o vzduch), můžeme vrh považovat za probíhající ve vakuu. Je tedy snadno popsatelný jednoduchými matematickými vztahy. Často také pro úplnost uvažujeme, že gravitační pole je tzv. *homogenní*, což znamená, že působí ve všech místech stejně. Takto o něm můžeme mluvit například při povrchu Země, kde nepoznáme, že je zakřivený (gravitační síly přece jen míří do středu naší planety, ale na tak malém kousku Země se to neprojeví).

Uvažujme hmotný bod (těleso – například míč, jehož rozměry jsou zanedbatelné, a proto jsme ho nahradili bodem v prostoru, nejčastěji to bývá těžiště), kterému v gravitačním poli Země udělíme počáteční rychlost v_0 ve směru charakterizovaném úhlem α (α je *elevační* úhel, tedy úhel mezi rovinou země a směrem počáteční rychlosti bodu). Na tento hmotný bod dále působí už jen neměnící se tíhová síla $F_\mathrm{g} = mg$ ve svislém směru. Klíčové je uvědomit si, že hmotný bod koná dva pohyby, které jsou na sobě nezávislé. V první řadě je to rovnoměrný přímočarý pohyb rychlostí v_0 ve vodorovném směru, a pak také rovnoměrně zrychlený volný pád ve svislém směru. Je to dáno tím, že na bod nepůsobí žádné síly ve vodorovném směru, a tak v tomto směru musí mít stále stejnou rychlost. Naopak, ve směru svislém bod urychluje tíhová síla, proto se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb dolů (volný pád).

Když se zamyslíme nad jednotlivými veličinami, které jsou pro popis pohybu hmotného bodu důležité, uvědomíme si, že průběh vrhu bude nejvíce ovlivňovat právě takzvaný elevační úhel α, který svírá směr počáteční rychlosti v_0 s vodorovnou rovinou. V závislosti na tomto úhlu rozlišujeme celkem 5 základních typů vrhů.

- Vrh svislý vzhůru ($\alpha = 90°$)
- Vrh šikmý vzhůru ($90° > \alpha > 0°$)
- Vrh vodorovný ($\alpha = 0°$)
- Vrh šikmý dolů ($0° > \alpha > -90°$)
- Vrh svislý dolů ($\alpha = -90°$)

Díky symetrii se dokážeme vypořádat se situací pro úhel od 0 do 360 stupňů. Vrhy se snažíme obvykle popsat za účelem zjištění konkrétních parametrů. Nad rámec základních charakterizujících veličin nás může zajímat například okamžitá výška h nad zemí, maximální výška h_max nad zemí a horizontální vzdálenost d, kam bod doletí. Nesmíme zapomínat na čas t, který těleso letí a ke kterému danou situaci obvykle vztahujeme. Vyzbrojeni základní teorií se můžeme podívat na jednotlivé typy vrhů.

Svislý vrh vzhůru a dolů

U svislého vrhu je elevační úhel $\alpha = 90^\circ$ a odpovídá např. případu, kdy něco vyhodíme nad hlavu a snažíme se, aby předmět dopadl zpátky do nijak nepřesunuté ruky, tudíž se hmotný bod pohybuje v čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ kolmo k vodorovné rovině. Hmotný bod při svislém vrhu bude mít také trajektorii kolmou k vodorovné rovině, protože takový hmotný bod bude mít pouze vertikální rychlost. U tohoto typu vrhu nás mohou zajímat tyto veličiny:

- Doba výstupu $t_\mathrm{v} = \dfrac{v_0}{g}$.

  Tento matematický vztah snadno odvodíme ze vztahu mezi zrychlením a rychlostí pro rovnoměrně zpomalený pohyb s počáteční rychlostí v_0, za který můžeme v tomto případě pohyb hmotného bodu až do jeho zastavení považovat.

- Doba letu $t_\mathrm{d} = 2t_\mathrm{v}$.

  Po zastavení hmotného bodu ve výšce h_max začne hmotný bod opět okamžitě zrychlovat v opačném směru. Výstup a sestup jsou zaměnitelné pohyby. Kdybychom si záznam sestupu nahráli a pustili pozpátku, bude se nám zdát, že sledujeme výstup. Než se bude opět nacházet v počáteční poloze, uplyne dvojnásobek doby výstupu.

- Maximální výška $h_\mathrm{max} = \dfrac{v_0^2}{2g}$.

  Poslední matematický vztah nejsnadněji odvodíme ze zákona zachování energie, protože víme, že kinetická energie na počátku vrhu se bude rovnat potenciální energii ve výšce h_max, neboť tam bod kinetickou energii nemá. Rovnice zákona zachování energie pak vypadá takto:

$$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_\mathrm{max}$$

Na závěr se krátce zamyslíme nad velmi podobným svislým vrhem dolů. Koncept doby letu, doby výstupu a maximální výšky ztrácí smysl. V čase t se bude hmotný bod nacházet ve vzdálenosti

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}mv^2$$

pod místem hodu, kde rychlost musí mít hodnotu $v = v_0 + gt$. Pohyb probíhá v souladu se zákony rovnoměrně zrychleného pohybu s nenulovou počáteční rychlostí (dokud bod případně nenarazí na zem).

Vodorovný vrh

Při vodorovném vrhu je úhel $\alpha = 0^\circ$. Aby měly naše úvahy smysl, je zřejmé, že hmotný bod musí svůj pohyb začínat v nějaké počáteční výšce h. Pro tento typ vrhů si odvodíme několik dalších matematických vztahů, pomocí kterých je budeme společně s již dříve odvozenými popisovat:

- Doba letu $t_\mathrm{d} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Dobu letu určíme jednoduše, protože víme, že výška h se rovná dráze letu, kterou těleso urazí volným pádem za čas letu t_d. Ve svislém směru má těleso z definice svislého vrhu nulovou počáteční rychlost.

$$h = \frac{1}{2} g t_\mathrm{d}^2 \implies t_\mathrm{d} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

- Horizontální vzdálenost místa dopadu od místa udělení počáteční rychlosti. $d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

  Tentokrát si vzpomeneme na nezávislost jednotlivých pohybů. Předtím, než hmotný bod spadne na zem, může se pohybovat v horizontálním směru po čas t_d. Celou dobu se také v tomto směru pohybuje rychlostí v_0 (i když ve svislém směru stále zrychluje), proto bude celková uražená vzdálenost v horizontálním směru před okamžikem dopadu právě $d = v_0 t_\mathrm{d}$.

- Dále nás může zajímat rychlost v okamžiku dopadu $v_\mathrm{d} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

  Uvedený vzorec lze odvodit několika způsoby, my si ukážeme dva nejjednodušší.

  Pomocí Pythagorovy věty a horizontální a vertikální rychlosti za použití dříve odvozených vztahů:

  $$v_\mathrm{d} = \sqrt{v_\mathrm{x}^2 + v_\mathrm{y}^2} = \sqrt{v_0^2 + (g t_\mathrm{d})^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\,.$$

  Pomocí zákona zachování energie:

  $$\frac{1}{2} m v_\mathrm{d}^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{d} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\,.$$

Šikmý vrh vzhůru

Než přistoupíme k závěru tohoto Výfučtení, podíváme se na obecnější situaci, ve které nebude platit, že by byl směr počáteční rychlosti ve vztahu k vodorovné rovině v nějaké speciální poloze. Hmotnému bodu je udělena počáteční rychlost v_0 svírající s vodorovnou rovinou úhel $90° > \alpha > 0°$. Šikmému vrhu dolů se v tomto textu podrobněji věnovat nebudeme, zájemcům o hlubší pochopení problematiky vrhů doporučujeme studijní text pro řešitele Fyzikální olympiády a další zájemce o fyziku.[4]

Trajektorií vodorovného i šikmého vrhu je parabola, protože polohu hmotného bodu popisujeme v obou případech vztahem, který je ve skutečnosti předpisem kvadratické funkce. K tomu, abychom mohli se šikmými vrhy dále pracovat, si budeme muset odvodit, jak se počítají horizontální a vertikální polohy a rychlosti. Začneme s horizontální rychlostí.

Horizontální rychlost se za celou dobu letu nemění a my ji můžeme spočítat z počáteční rychlosti a úhlu α, který svírá vektor počáteční rychlosti tvořící přeponu pravoúhlého trojúhelníku s vektorem horizontální rychlosti. Vektor horizontální rychlosti je v tomto pravoúhlém trojúhelníku odvěsnou. Díky tomu je možné spočítat velikost horizontální rychlosti také pomocí goniometrických funkcí v trojúhelníku tvořeném rychlostí a její vodorovnou a svislou složkou. Pro ty, kteří s nimi ještě nejsou zvyklí pracovat, můžeme uvést i rozpis jejich hodnot do složek.

$$v_\mathrm{x} = v_0 \cos\alpha = v_0 \left(\frac{v_{0\mathrm{x}}}{v_0} \right)$$

[4] `http://fyzikalniolympiada.cz/texty/vrhy.pdf`

Nalézt vztah pro horizontální vzdálenost už pak není obtížné.

$$d = v_{\mathrm{x}} t = v_0 t \cos\alpha$$

Při odvozování vztahu pro výpočet vertikální rychlosti budeme používat ten stejný pravoúhlý trojúhelník, jen vektor této rychlosti bude protilehlá odvěsna (tudíž použijeme sinus) a nesmíme zapomenout odečíst rostoucí rychlost v důsledku působení tíhové síly. Výsledný vztah není nic jiného než běžný vztah pro výpočet rychlosti rovnoměrně zpomaleného pohybu.

$$v_{\mathrm{y}} = v_0 \sin\alpha - gt$$

Analogicky jako v horizontálním směru nalezneme vztah pro vertikální vzdálenost. Dostáváme opět povědomý vztah pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu.

$$h = v_0 t \left(\frac{v_{0\mathrm{y}}}{v_0}\right) - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Podobně jako v předchozích případech si na závěr odvodíme vztahy pro výpočet charakteristických parametrů.

- Souřadnice vrcholu paraboly.

  Když si uvědomíme, že těleso bude na vrcholu v ten moment, kdy jeho vertikální rychlost bude nulová, můžeme lehce spočítat čas, za který těleso vystoupá na vrchol.

  $$v_{\mathrm{y}} = v_0 \sin\alpha - gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\mathrm{v}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

  Odvození souřadnic vrcholu by na základě předchozího textu nemělo být složité, a tedy snadno zvládnutelné, proto jej pro tentokrát necháváme na každém jednotlivém čtenáři a vrhneme se na odvození souřadnic dalšího důležitého bodu.

- Souřadnice bodu dopadu.

  Vše, co nám k odvození hledaného vztahu stačí, je vědět, že při šikmém vrhu vzhůru s nulovou počáteční výškou bude čas letu t_{d} opět dvakrát větší než čas potřebný k dosažení vrcholu trajektorie. Víme, že v okamžiku dopadu bude výška nulová. Na závěr dosadíme vztah pro čas výstupu.

  $$d = 2 v_0 t_{\mathrm{v}} \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad t_{\mathrm{v}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

  Vidíme, že nejdále při šikmém vrhu vzhůru dohodíme, když budeme házet pod úhlem 45°, protože pro tuto hodnotu úhlu je součin $\sin\alpha \cos\alpha$ největší ($= 1$). Pro zajímavost uvádíme, že při započítání odporu vzduchu by byl tento úhel o něco menší, totiž přibližně 42°.

A co realistický případ?

Vrhy tak, jak jsme se jimi doteď zabývali, byly všechny modelovány bez odporové síly prostředí a v homogenním gravitačním poli. Není bez zajímavosti si říct také širší kontext teorie vrhů, pokud některý z předpokladů nedodržíme.

Vrhy v nehomogenním gravitačním poli jsou doménou *orbitální mechaniky*, tedy nauky o pohybu kosmických plavidel v gravitačním působení nebeských těles. Naopak u nebeských těles samotných (například teorie oběhu Země kolem Slunce) mluvíme o *nebeské mechanice*. Jejich spojitost s vrhy se stane zřejmější, když si uvědomíme, že raketa, která zaujala stálou uzavřenou oběžnou dráhu nad povrchem planety, musela být vlastně vržena svými motory do kosmického prostoru takovou rychlostí, že by se její bod dopadu měl díky kulatosti planety s jejím povrchem minout. Gravitační působení planety raketu neustále stahuje do jejího těžiště, čímž může její trajektorii uzavřít například do kruhu.

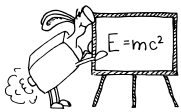
Pokud vedeme vrh v prostředí, u kterého nemůžeme zanedbat jeho odpor (např. hod ping-pongového míčku na velkou vzdálenost ve vzduchu), pak se každé těleso pohybuje trochu jinak. Zpravidla je bod dopadu blíže, než je tomu u bezodporového případu, protože je těleso po celou dobu pohybu zpomalováno, a to tím více, čím rychleji se pohybuje. Důležitým pojmem k zapamatování, je *balistická křivka*, což je trajektorie každého tělesa vrženého odporujícím prostředím, která mimochodem neodpovídá parabole, ani žádné jiné pojmenované funkci.

Jako zajímavost můžeme uvést, že i když jsou vrhy těles v odporujícím prostředí velmi aplikovanou disciplínou, napsat přesné řešení rovnic pro jejich pohyb je v tomto případě velmi složité, i když tyto výsledky jsou již nějakou dobu známy. V mnoha případech je stále jednodušší a šířeji aplikovatelné používat počítačových simulací.[5]

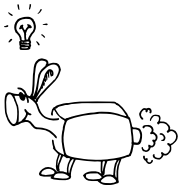
Viktor Materna
materna@vyfuk.mff.cuni.cz

Martin Kysela
martink@vyfuk.mff.cuni.cz

[5] První počítače byly vyvíjeny právě pro rychlý výpočet potřebných parametrů pro přesnou střelbu z lodních kanónů, což je ukázkový případ šikmého vrhu.



Řešení I. série



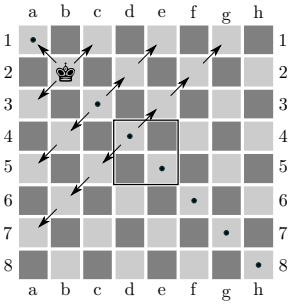
Úloha I.1 ... Královna v šachu

5 bodů; průměr 3,42; řešilo 52 studentů

Jindra si při každé partii šachu dobře uvědomuje, jakou moc má královna a jak často ji jeho protivníci přehlížejí a podceňují. Nalezněte proto všechny pozice na šachovnici, na kterých má královna největší moc – tu uvažujme jako procento všech políček, která ohrožuje, tj. na která může královna jedním tahem vstoupit. Přítomnost ostatních figurek zanedbejte.

Šachovnici si můžeme představit jako jednoduchou mřížku, která obsahuje 8 řádků (označme si je A–H) a 8 sloupců (1–8). Tahy, které královna na šachovnici může provést, jsou velice jednoduché – může se posunout o libovolný počet polí horizontálně, vertikálně, nebo diagonálně. Abychom zjistili, kde má královna největší moc, je důležité si uvědomit, jak se možné tahy mění v závislosti na pozici královny.

Pokud královnu postavíme do rohu šachovnice, například na pozici A1, bude se moci posunout o 7 políček vertikálně dolů a o 7 horizontálně doprava. Pokud ji umístíme například na pole C5, můžeme ji dále sunout o 4 pole vertikálně nahoru, o 3 pole vertikálně dolů, o 2 pole horizontálně doleva a o 5 polí horizontálně doprava. V obou případech můžeme královnu v horizontálním a vertikálním směru posunout maximálně o 14 polí. Jelikož je hrací plocha čtvercová, od okrajů to bude mít figurka vždy stejně daleko, nehledě na její souřadnice. O tom, kde má královna nejvýhodnější pozici, tak rozhoduje pohyb diagonální, tedy po úhlopříčkách.



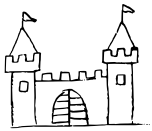
Obr. 3: Pozice královny na šachovnici

Pokud si královnu postavíme opět do pole A1, můžeme ji posunout po diagonále ve směru H8 o 7 polí. Poté na poli B2 může královna popojít ve směru H8 o 6 polí, nazpět ve směru A1 o 1 pole, a ve směrech C1 a A3 také o 1 pole. Z toho vyplývá, že když měníme pozici královny na jedné úhlopříčce, počet políček, která jsou k dispozici, se na této úhlopříčce nemění. Nastává tedy stejná situace jako například při horizontálním posunu. Co se ale naopak mění, je možnost pohybu na úhlopříčce druhé. Čím blíže je figurka středu hrací plochy, tím větší má možnosti pohybu v kolmém směru. Jelikož má naše hrací pole sudý počet sloupců i řádků, nemůžeme najít jedno prostřední políčko. Královna tak má největší moc na čtyřech centrálních polích, tedy D4, D5, E4, E5. Na každém z nich má možnost se posunout na dalších 27 jiných polí, což tvoří přibližně 42 % z celkového počtu polí.

Karolína Letochová
kaja@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.2 ... Prohlídka hradu

5 bodů; průměr 4,81; řešilo 111 studentů



Organizátoři Výfuku si o prázdninách přivydělávají jako průvodci na hradě, kde jsou 3 různě dlouhé prohlídkové trasy a každou provází jiný průvodce. Julča má trasu dlouhou 30 minut, Marťa 40 minut a Kája 45 minut. Ráno začínají všechny tři provázet v 9 hodin u brány. V kolik hodin se všechny opět potkají u brány, jestliže návštěvníky provázejí nepřetržitě celý den?

Nejdříve si můžeme představit časovou osu a časy na ní podle toho, jak organizátorky provádí své trasy. Jako první bude mít hotovo Julča, musela by ale čekat 10 min na Marťu, a tudíž bude pokračovat. My hledáme takový čas, ve kterém všechny tři organizátorky ukončí svoji prohlídku současně. Můžeme tedy jednotlivé časy skládat na časovou osu, dokud všechny tři celkové intervaly nebudou stejné. K tomu se v matematice využívá nejmenší společný násobek (NSN) těchto tří čísel. Ten se nám hodí, protože nám dokáže říci, jak musíme zkombinovat různá čísla tak, abychom z nich dostali co nejmenší číslo, které je možné získat znásobováním jejich společných částí. Proto si jednotlivé časy rozložíme na prvočísla:

$$t_{\mathrm{J}} = 30\,\mathrm{min} = 2 \cdot 3 \cdot 5\,\mathrm{min}$$
$$t_{\mathrm{M}} = 40\,\mathrm{min} = 2^3 \cdot 5\,\mathrm{min}$$
$$t_{\mathrm{K}} = 45\,\mathrm{min} = 3^2 \cdot 5\,\mathrm{min}$$

NSN se skládá následovně – z daných čísel vytvoříme součin největších mocnin od každého čísla. V našem příkladě by to tedy vypadalo:

$$t_{\mathrm{NSN}}(t_{\mathrm{J}}; t_{\mathrm{M}}; t_{\mathrm{K}}) = t_{\mathrm{NSN}}(30; 40; 45) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5\,\mathrm{min} = 360\,\mathrm{min}$$

Nejkratší čas, po kterém se tři organizátorky sejdou, je 6 hodin. Julča, Marťa a Kája se střetnou zase u brány až v 15:00.

Můžeme se ujistit, že každá z provázejících stihla udělat celočíselný počet prohlídek – kdyby ne, tak by naše řešení nebylo správné.

Julča má trasu 30 min, stihne tedy udělat $360/30 = 12$ prohlídek. Marťa se čtyřicetiminutovou trasou stihne udělat $360/40 = 9$ prohlídek a Kája s trasou délky 45 min pak $360/45 = 8$ prohlídek.

Počty prohlídek nám vyšly celočíselně, což znamená, že naše řešení je správné. Můžeme si také všimnout, že tyto počty nemají společného dělitele – kdyby měly, holky by se potkaly už předtím.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.3 ... Hlavně se pořádně drž

6 bodů; průměr 3,93; řešilo 86 studentů

Adama zajímalo, s jakým zrychlením se rozjíždí metro, a proto, když stálo v klidu ve stanici, vběhl dovnitř a položil na jeden konec vagónu kuličku. Jakmile se souprava začala rozjíždět, začal měřit čas a zjistil, že po čase t kulička narazila do protějšího konce vagónu. Zde už zůstala, zatímco souprava zrychlovala nadále. Doma zjistil, že jeden vagón je dlouhý s. Zjistěte jako Adam, s jakým zrychlením se metro rozjíždí a jakou rychlost mělo v okamžiku nárazu kuličky.

Poloměr kuličky neuvažujte a úlohu spočítejte jak obecně, tak pro hodnoty $t = 5\,\mathrm{s}$ *a* $s = 18\,\mathrm{m}$.

Předpokládejme, že kulička je zanedbatelně malá a kutálí se bez prokluzování nebo ztrát energie. Při rozjíždění metra se začne pohybovat vzhledem k samotnému metru, ovšem vzhledem k zemi zůstává statická. Proto rychlost, kterou se kulička pohybuje uvnitř metra, je stejná, jakou se metro pohybuje relativně k zemi.

Dráhu zrychleného pohybu můžeme vypočítat pomocí vzorce $s = s_0 + v_0 t + at^2/2$, kde s_0 vyjadřuje již ujetou dráhu, v_0 značí počáteční rychlost kuličky, a značí zrychlení a t čas. Při dosazení $s_0 = 0\,\mathrm{m}$ (kulička zatím neujela žádnou dráhu) a $v_0 = 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (kulička je na začátku v klidu) můžeme ze vzorce odvodit vztah pro zrychlení

$$\begin{aligned} a &= \frac{2s}{t^2}\,, \\ a &= \frac{2 \cdot 18\,\mathrm{m}}{(5\,\mathrm{s})^2}\,, \\ a &= 1{,}44\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,. \end{aligned}$$

Při číselném dosazení do tohoto vztahu získáváme zrychlení metra $a = 1{,}44\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, což, pro zajímavost, zhruba odpovídá skutečnému zrychlení metra v Praze!

Konečnou rychlost metra v nyní vypočítáme pomocí rovnice pro rychlost zrychleného pohybu $v = v_0 + at$, kde v_0 je již zmíněná počáteční rychlost, která má hodnotu $v_0 = 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ při zrychlování kuličky z klidu.

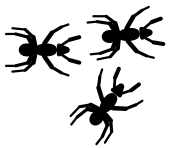
$$v = at = 1{,}44\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 5\,\mathrm{s} = 7{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

V okamžiku nárazu kuličky se metro pohybuje rychlostí $v = 7{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Adam Krška
adam@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... Mravenci na slunci

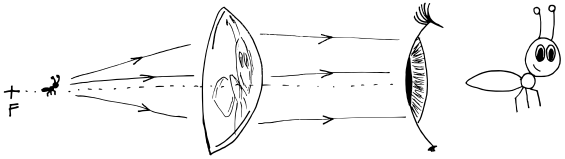
6 bodů; průměr 3,62; řešilo 61 studentů



Soňa našla starou krabici a v ní troje brýle. První měly kruhové čočky o poloměru $r = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ *a optické mohutnosti* $\varphi_1 = 10\,\mathrm{D}$ *(dioptrií)*[6]*. Čočky druhých brýlí byly tvaru čtverce o straně* $a = 5\,\mathrm{cm}$ *a jejich optická mohutnost* $\varphi_2 = 6{,}25\,\mathrm{D}$. *Třetí brýle měly čočky ve tvaru rovnostranného trojúhelníka o straně* $b = 5\,\mathrm{cm}$ *a optickou mohutnost* $\varphi_3 = 20\,\mathrm{D}$. *Soňa pak šla s těmito brýlemi ven na polední slunce pozorovat mravence. Kterými brýlemi si při vzdálenosti* $h = 10\,\mathrm{cm}$ *mravence zvětší, ale neupeče jej? Kterými brýlemi dosáhne největšího výkonu ohřevu, když si pak bude chtít rozdělat oheň na opékání špekáčků (při rozdělávání ohně může Soňa brýle umístit do libovolné vzdálenosti)?*

Nejprve bychom si měli připomenout, jakým způsobem fungují brýle nebo lupy. Pokud si obraz zvětšujeme takovým způsobem, že jej pozorujeme přímo na čočce (tedy ne na nějakém stínítku), říkáme mu obraz nepravý (někdy neskutečný). Takovýto obraz lze pozorovat, pokud je pozorovaný předmět ke spojné čočce blíže než její ohnisko. Jinými slovy, vzdálenost předmětu h nesmí být od čočky větší než ohnisková vzdálenost f.

[6] Optická mohutnost je převrácená hodnota ohniskové vzdálenosti.



Obr. 4: Jak spojná čočka brýlí funguje jako lupa.

Ohniskovou vzdálenost čočky můžeme určit z její optické mohutnosti φ, která se udává v jednotkách, které nejspíše znáte, totiž v dioptriích. Ohniskovou vzdálenost vypočítáme v metrech podle následujícího vzorce:

$$f = \frac{1}{\varphi}\,.$$

Když dosadíme za φ pro jednotlivé brýle, dostáváme $f_1 = 10\,\mathrm{cm}$, $f_2 = 16\,\mathrm{cm}$ a $f_3 = 5\,\mathrm{cm}$. Vidíme, že druhé brýle určitě použít můžeme, protože $h < f_2$ (mravenec je tedy před ohniskem a vznikne zvětšený obraz). Zato třetími brýlemi si rozhodně mravence nezvětšíme, obdrželi bychom skutečný obraz, který nelze pozorovat očima přímo (bylo by možné ho promítnout na stínítko).

Použitím prvních brýlí, kde by mravenec byl přímo v ohnisku, bychom obraz neobdrželi, a navíc by hrozilo, že sluneční světlo mravence uškvaří. Jedna z vlastností čoček totiž je, že se rovnoběžně přicházející paprsky (ze Slunce) sbíhají do ohniska. V ohnisku se tak seběhne hodně paprsků, které by mohly mravence uškvařit.

Dále se úloha ptá na výkonnost ohřevu. Tento výkon je zcela nezávislý na ohniskové vzdálenosti, závisí pouze na ploše obsahu čočky (tedy na „množství“ slunečních paprsků, které na čočku dopadnou). Na každý metr čtvereční na Zemi, kdybychom jej umístili kolmo ke Slunečním paprskům, dopadá nejvýše 1 360 W. Proto stačí porovnat plochy čoček.

Obsah první čočky určíme ze vztahu pro výpočet obsahu kruhu:

$$S_1 = \pi r^2\,.$$

Dosadíme-li v centimetrech, obdržíme obsah $S_1 \doteq 19{,}6\,\mathrm{cm}^2$. Obsah druhé čočky je obsah čtverce o straně $a = 5\,\mathrm{cm}$:

$$S_2 = a^2\,.$$

Obsah čočky nám vychází jako $S_2 = 25\,\mathrm{cm}^2$. Třetí čočka má tvar rovnostranného trojúhelníku. Obsah rovnostranného trojúhelníku se stranami o délce b a výškou v_b spočítáme jako:

$$S_3 = \frac{bv_b}{2} = \frac{b \cdot b \cdot (\sqrt{3}/2)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2\,,$$

protože v rovnostranném trojúhelníku je $v_b = b\sqrt{3}/2$ (z Pythagorovy věty). Dosadíme-li, obdržíme výsledek $S_3 \doteq 10{,}8\,\mathrm{cm}^2$.

Nejvýhodnější je tedy k zapálení ohně použít čtvercové brýle, protože mají největší plochu. Soňa musí brýle umístit tak, aby objekt (papír, dřevo), který chce zapálit, byl v ohniskové vzdálenosti brýlí.

Poznámka: v reálném světě se jen velmi zřídka potkáte s brýlemi o 20 dioptriích. Většina zmiňovaných hodnot se často pohybuje mezi -5 a $+5\,\mathrm{D}$, přičemž tyto hodnoty často neoznačují

optickou mohutnost čočky brýlí jako takovou, ale spíše jak velká je korekce ohniskové vzdálenosti celkové soustavy s okem.

Marco Souza de Joode
joode@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.5 ... Jack a fazole

7 bodů; průměr 5,10; řešilo 80 studentů

Před dávnými časy žil šikovný obchodník Jack. Na trhu se mu podařilo získat kouzelné fazole, které si večer zasadil za domem. Ráno se nestačil divit; ze země trčel mohutný fazolový stonek, a jelikož byl Jack zvídavý, začal po něm šplhat. Na vrcholu stonku ho čekalo překvapení; ocitl se na obřím mraku, na kterém nejenže mohl stát, ale tento mrak dokonce nesl obří statek. Jack se usadil a začal přemýšlet nad fyzikou skrytou za těmito jevy. Pomůžete mu?

1. *Zjistěte, jak vysoko se Jack vyšplhal, pokud vyrazil rychlostí* $v = 0{,}25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *a svého cíle dosáhl po deseti hodinách.*
2. *Jackovi nešlo do hlavy, že by mohl na mraku stát, protože věděl, že shluky ve vzduchu se vznášejících kapiček nemohou unést nic většího než je samotné. „Třeba je to nějaký balon," pomyslel si a začal počítat. Jaký plyn by za normálního tlaku takový mrak o objemu jedné setiny* km^3 *musel obsahovat, pokud by měl unést* $10\,000\,\mathrm{t}$ *těžký obří statek?*
3. *Po úvahách se Jack vydal do statku, kde našel slepici, která snáší zlatá vejce, ale přitom si vesele pobíhá po dvorku bez známek přidané tíhy ve zlatě. Zjistěte, kolikrát těžší by byla slepice nesoucí zlaté vejce než obyčejná slípka vážící* $m_\mathrm{S} = 2{,}5\,\mathrm{kg}$*. Údaje jako hmotnost či objem vejce si dohledejte a nezapomeňte v řešení uvést zdroj. Předpokládejte, že slepice snáší jedno zlaté vejce denně, které zezlátne až při snesení předešlého vejce.*

1. Nejdříve si uděláme zápis známých veličin:

$$v = 0{,}25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}},\ t = 10\,\mathrm{h},\ s = ?$$

Abychom mohli příklad dále snadno počítat, převedeme všechny veličiny do základních jednotek:

$$t = 10\,\mathrm{h} = 36\,000\,\mathrm{s}\,.$$

Nyní použijeme vzorec pro výpočet dráhy z rychlosti a času $s = v \cdot t$:

$$\begin{aligned} s &= v \cdot t \\ s &= 0{,}25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 36\,000\,\mathrm{s} \\ s &= 9\,000\,\mathrm{m} = 9\,\mathrm{km}\,. \end{aligned}$$

Jack se tedy vyšplhal do výšky 9 kilometrů.

2. Klíčem k řešení je uvědomit si, že aby mohl obří statek stát na mraku, musí být tíhová a vztlaková síla v rovnováze kvůli prvnímu Newtonovu zákonu. Protože je ale mrak tak

velký, nesmíme zanedbat ani hmotnost plynu v pomyslném balónu. Vyjádříme tedy celkovou hmotnost mraku i se statkem m_c, kde $V_m = 0{,}01\,\mathrm{km}^3 = 10^7\,\mathrm{m}^3$ je objem mraku, $m_\mathrm{s} = 10\,000\,\mathrm{t} = 10^7\,\mathrm{kg}$ hmotnost statku a ϱ_p hustota plynu v balonu:

$$m_\mathrm{c} = m_\mathrm{s} + V_m \cdot \varrho_\mathrm{p}\,.$$

Z rovnosti vztlakové síly podle Archimédova zákona a tíhové síly si vyjádříme hustotu plynu:

$$\begin{aligned} m_\mathrm{c} g &= V \varrho_\mathrm{v} g\,, \\ m_\mathrm{s} + V_m \cdot \varrho_\mathrm{p} &= V \varrho_\mathrm{v}\,, \\ \varrho_\mathrm{p} &= \varrho_\mathrm{v} - \frac{m_\mathrm{s}}{V}\,. \end{aligned}$$

Teď do vzorce dosadíme zadané hodnoty veličin a hustotu vzduchu. Protože máme uvažovat normální tlak, hustota vzduchu bude mít hodnotu[7] přibližně $\varrho_v \doteq 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$:

$$\begin{aligned} \varrho_\mathrm{p} &= 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} - \frac{10^7\,\mathrm{kg}}{10^7\,\mathrm{m}^3}\,, \\ \varrho_\mathrm{p} &\doteq 0{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,. \end{aligned}$$

Výsledek porovnáme s hustotami plynů. Nejblíže našemu výsledku je hustota helia, která je $\varrho_\mathrm{He} = 0{,}18\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Další plyny, jež jsou relativně blízko vypočtené hodnotě, jsou vodík $\varrho_\mathrm{H} = 0{,}09\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, nebo methan $\varrho_{\mathrm{CH}_4} = 0{,}71\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, avšak tyto hustoty už jsou od naší hodnoty dále než helium.

Mrak by tedy musel obsahovat převážně helium, aby unesl obří statek, jednalo by se nejspíše o směsici plynů.

3. Z obecné charakteristiky slepičího vejce[8] zjistíme, že hmotnost vejce je $m_\mathrm{v} \doteq 60\,\mathrm{g}$ a jeho objem $V_\mathrm{v} \doteq 50\,\mathrm{cm}^3$. Teď spočítáme, jaká by byla hmotnost vejce, pokud by bylo zlaté (hustota zlata je $\varrho \doteq 19{,}3\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$). Nezapomeneme při tom vhodně zaokrouhlit.

$$\begin{aligned} m &= V \varrho\,, \\ m_\mathrm{zv} &= 50\,\mathrm{cm}^3 \cdot 19{,}3\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}\,, \\ m_\mathrm{zv} &\doteq 1\,000\,\mathrm{g}\,. \end{aligned}$$

Teď od hmotnosti zlatého vejce odečteme hmotnost obyčejného vejce a tím určíme, o kolik gramů bude těžší slepice se zlatým vejcem:

$$m_\mathrm{r} = 1\,000\,\mathrm{g} - 60\,\mathrm{g} \doteq 940\,\mathrm{g}\,.$$

Abychom zjistili, kolikrát bude slepice se zlatým vejcem těžší, vydělíme její hmotnost hmotností obyčejné slepice:

$$\begin{aligned} n &= \frac{m_s + m_r}{m_s}\,, \\ n &= \frac{2\,500\,\mathrm{g} + 940\,\mathrm{g}}{2\,500\,\mathrm{g}}\,, \\ n &= 1{,}4\,. \end{aligned}$$

[7] Hodnota odečtena z tabulek.
[8] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Vejce`

Slepice nesoucí zlaté vejce by byla přibližně 1,4krát těžší než normální slepice.

Lubor Čech
lubor@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.E ... Lodička

7 bodů; průměr 4,80; řešilo 44 studentů

Plastelína má velmi široké využití – od vděčné hračky pro děti přes šikovný stojan na tužky až po perfektní improvizované těsnění. Jednou z mnoha věcí, které z ní lze vyrobit, jsou lodičky.

Z jednoho válečku[9] *plastelíny vytvořte loďku, která unese co nejtěžší náklad (musí přitom stále plavat). Porovnejte různé modely a zašlete nám jejich fotografie. Který unese nejvíc a proč? Změřte přesně nosnost a hloubku ponoru. Tři nejlepší a nejoriginálnější konstruktéry sladce odměníme.*

Teorie

Všechna tělesa, která ponoříme do kapaliny, jsou nadlehčována hydrostatickou vztlakovou silou. Její velikost je podle Archimédova zákona rovna tíze kapaliny vytlačené tělesem. Závisí tedy na objemu ponořené části tělesa (tolik kapaliny bylo vytlačeno), hustotě kapaliny (z objemu a hustoty můžeme vypočítat hmotnost) a tíhovém zrychlení (z něj a hmotnosti získáme tíhovou sílu). Pro velikost vztlakové síly použijeme vzoreček $F_{\mathrm{vz}} = V\varrho_{\mathrm{k}}g$. Aby loďka plavala, musí vztlaková síla vyrovnat sílu tíhovou, která na loďku působí a stahuje ji směrem dolů, takže platí $V\varrho_{\mathrm{k}}g = mg$. Hmotnost loďky zvyšujeme nákladem, který má unést; tíhové zrychlení ani hustotu vody nemáme totiž za běžných podmínek šanci výrazně ovlivnit. Takže jediný způsob, jak můžeme zvýšení hmotnosti vyrovnat, je zvýšit objem ponořené části lodičky. Čím objemnější bude ponořená část, tím více by měla loď uvést. S tím souvisí také hloubka ponoru loďky – čím je loďka užší, tím níž se musí ponořit, naopak loďce široké stačí klesnout méně. Nakonec potřebujeme brát v potaz také stabilitu lodičky. Měla by být souměrná a zátěž se musíme snažit rozkládat rovnoměrně, aby se loďka nepřevrátila.

Nosnost loďky změříme tak, že do ní budeme postupně vkládat zátěž, dokud se nepotopí. Jakmile klesne ke dnu, vylovíme ji i s veškerou zátěží, odebereme část, po jejímž přidání se loď potopila, a zbylou zátěž zvážíme. Protože se mohlo stát, že jsme naměřili nižší nosnost kvůli neopatrnému vložení nebo vložení příliš těžké zátěže, tak měření několikrát opakujeme. Když potopenou loďku znovu položíme na hladinu, lehce se deformuje (někdy je také nutné opravit trhliny), tedy je možné, že ve druhém pokusu má větší nosnost než v prvním. V zadání se ptáme na nosnost nejvyšší, a tak uvedeme nejvyšší naměřenou hodnotu pro konkrétní model.

Hloubku ponoru změříme tak, že do průhledné nádoby uchytíme kolmo na hladinu vody pravítko, na kterém odečteme výšku hladiny a výšku nejnižšího bodu dna loďky. Rozdíl těchto hodnot je hloubka ponoru loďky. Můžeme si všimnout, že při zatěžování lodičky se nám se zvyšující se hloubkou ponoru zvedá hladina vody. O kolik se hladina zvedne však nemá na hloubku ponoru vliv. Vytlačenou kapalinu ve znění Archimédova zákona můžeme také interpretovat jako kapalinu v díře po tělese,[10] které bude stejně, ať je loďka v malé nádobě nebo ve

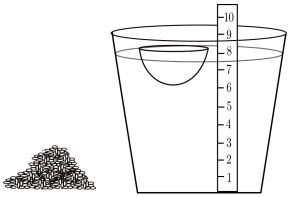
[9] nezapomeňte jej předtím zvážit

[10] Tj. kapalinu, kterou bychom mohli vyplnit díru, která by po lodičce zbyla ve zcela zamrazené plné nádobě. Pokud bychom totiž loďku vložili do po okraj plné nádoby, do díry se vejde přesně ten objem, který přetekl, když jej loďka vytlačila.

velkém oceánu. V malé nádobě se vytlačená kapalina nemůže rozložit do nekonečna – hladina se viditelně zvedne; oceán je však tak velký, že ten objem vody, který loď vytlačí, na výšku hladiny nemá vliv. S trochou přehánění tedy můžeme říct, že díky zvedání hladiny by těžký tanker v jistém smyslu mohl plavat na 1 dl vody, pokud bychom ho rozprostřeli po celém jeho trupu.

Experiment

Pro měření použijeme průhlednou nádobu, do které připevníme pravítko, dále váleček plastelíny, který v našem případě vážil 7 g, kuchyňskou váhu a mokrou rýži jako zátěž. (Některá zrnka suché rýže plavou na vodě, tedy mají nižší hustotu než voda a pro dostatečné zatížení loďky bychom jich potřebovali více. Zároveň jsou však i v mokrém stavu dost malá na to, aby minimalizovala chybu měření, protože váží méně než gram, a kuchyňská váha váží s přesností právě na gramy. Tím, že zrnka předem namočíme, se také zbavíme velké nepřesnosti vzniklé tak, že původně suché zrnko po potopení nasaje vodu.)



Obr. 5: Schéma aparatury použité k měření. Je zde naznačeno pravítko k odečítání hloubky ponoru, jak jsme lodičky postupně zatěžovali rýží.

Měříme nosnost tří modelů – první je úzký s vysokou stěnou, protože by měl podle našeho předpokladu mít velkou hloubku ponoru; druhý široký, kterému by měla stačit stěna nižší; a třetí, který kombinuje vlastnosti obou předchozích, protože má přibližně tvar duté polokoule.

Obr. 6: Tvary jednotlivých lodiček

Měříme za pokojové teploty a snažíme se vyvarovat nežádoucích otřesů, které mohou vést k naplnění loďky vodou či jejímu převržení a předčasnému potopení, což značně ovlivní měření. Zároveň ze stejných důvodů zátěž pokládáme opatrně a rovnoměrně a snažíme se loďky nedotýkat, abychom ji nepotopili vlastní neopatrností. Když odečítáme hodnoty z pravítka, měli bychom se dívat kolmo na něj, protože při pohledu pod větším úhlem odečteme jinou hodnotu, než nám opravdu ukazuje. Nakonec musíme také dát pozor, abychom při vážení zátěže v nádobě[11] váhu vynulovali a nepřidávali tak k hmotnosti zátěže nepoužitou hmotnost vážicí nádoby.

	Model 1	Model 2	Model 3
Maximální naměřená nosnost (m)	71 g	84 g	122 g
Hloubka ponoru (h)	2,6 cm	1,7 cm	3,2 cm

Tab. 1: Naměřené hodnoty pro největší nosnosti

Nejistotu měření nemůžeme určit statisticky, protože měříme pouze jednu hodnotu. Uvedeme tedy systematickou nejistotu měřidla (naší kuchyňské váhy)[12] $u_m = 1$ g. Vyšší nejistotu v našem případě uvádět nemusíme, protože zrnko rýže se do nejistoty hmotností vejde. Kdybychom však přidávali těžší objekty, samotná nejistota měřidla by nestačila. Maximální hmotnost, kterou

[11] Tedy pokud nepokládáme přímo na váhu.
[12] U digitální váhy ji uvádí výrobce podle modelu.

loďka unese, leží někde mezi hmotností zátěže před přidáním a po přidání předmětu, který ji potopil, tedy nejistota by byla zvolena podle hmotnosti tohoto předmětu.

Hloubku ponoru odečítáme z pravítka, které má dílky po milimetrech. Odečítáme z něj však dvě hodnoty, z nichž počítáme rozdíl, a zároveň dno loďky je od pravítka nezanedbatelně vzdálené, tedy úhel pod kterým se díváme, výrazněji ovlivní odečtenou hodnotu – proto zde bude nejistota vyšší než polovina nejmenšího dílku měřidla. Uvažujme odchylku maximální, tedy součet odchylek obou hodnot, což je $u_h = 1\,\mathrm{mm}$.

Závěr

Při měření jsme narazili hned na několik problémů. Aby měla loďka co největší objem, museli jsme jí vymodelovat co nejtenčí stěny. Tenké stěny pak velmi snadno praskaly. Drobnými trhlinami voda díky povrchovému napětí nepronikne, avšak po přidání rýže se trhliny mnohdy zvětší a loď klesá ke dnu. Zároveň se s mokrou plastelínou hůře pracuje, takže se nám nedařilo vyrobit loďku s téměř dokonale rovnými okraji a začalo do ní zatékat dříve, než celý její okraj klesl na úroveň hladiny. Hloubka ponoru se tedy nikdy nerovnala výšce loďky. První model se ukázal být velmi nestabilní. Rychle se naplnil až po okraj a přitom neklesl dostatečně pod hladinu, takže se téměř vždy převrátil a potopil před dosažením sedmdesáti gramů zátěže, ačkoliv jsme se snažili rozložením rýže převracení co nejvíce omezit. Jeho maximální naměřená nosnost byla $m_1 = (71 \pm 1)\,\mathrm{g}$ při hloubce ponoru $h_1 = (26 \pm 1)\,\mathrm{mm}$. Druhý model byl zase příliš široký a měl moc rovné dno, takže snadno praskal. Zároveň měl příliš nízký okraj na to, aby plaval s velkou zátěží. Pro něj jsme naměřili maximální nosnost $m_2 = (84 \pm 1)\,\mathrm{g}$ při hloubce ponoru $h_1 = (17 \pm 1)\,\mathrm{mm}$. Poslední model problémy obou předchozích řešil tím, že kombinoval jejich největší výhody, tedy dosáhl největší nosnosti a zároveň také největší hloubky ponoru. Nejvyšší naměřená nosnost plastelínové lodičky tedy byla $m_1 = (122 \pm 1)\,\mathrm{g}$ při hloubce ponoru $h_1 = (32 \pm 1)\,\mathrm{mm}$. Připomínáme, že celková hmotnost použité plastelíny byla ve všech případech jen 7 g. Zjištěné poměry mezi nosností a původní hmotností nejsou neobvyklé ani pro skutečné velké lodě. Největší ropné tankery mohou také při vlastní hmotnosti 80 tisíc tun převážet přes 500 tisíc tun nákladu.

Soňa Husáková
sona@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.V ... LHC

7 bodů; průměr 3,06; řešilo 53 studentů

Na největším světovém urychlovači, LHC, o obvodu 27 km *mají letící protony energii až* 7 TeV.

1. *Tyto protony se v LHC pohybují až* 99,95 % *rychlosti světla. Kolikrát za sekundu jeden takový proton oběhne celý obvod urychlovače?*
2. *Částice zde dosahují energie, která bývá srovnávána s energií letícího komára. Ověřte tuto paralelu a výpočtem odhadněte kinetickou energii komára v elektronvoltech. Potřebné údaje si dohledejte a nezapomeňte uvést zdroje.*
3. *Jakou de Brogliovu vlnovou délku mají protony v urychlovači a jakou náš komár? De Brogliova vlnová délka je něco jako vzdálenost, která udává, jak blízko se musíme na daný předmět dívat, aby se přestal chovat tak, jak očekáváme, tedy začala platit pravidla kvantové fyziky. Měli bychom tak použít kvantovou fyziku na fyzikální popis srážky dvou protonů? A srážky dvou komárů? Proč?*

Poznámka: Pro hybnost protonu použijte vzorec plynoucí z relativity $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$.

1. Tato úloha slouží především k představě rychlostí, kterými se urychlený proton pohybuje. My známe jeho rychlost, která je 99,95 % rychlosti světla fixované na číselnou hodnotu $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, a délku okruhu, která je $l = 27\,\mathrm{km}$. Uraženou dráhu tedy vypočítáme jako
$$s = vt = 0{,}999\,5c \cdot 1\,\mathrm{s} \doteq 299\,642\,561{,}771\,\mathrm{m}\,.$$
Protony tedy celý urychlovač obletí $n = s/l \doteq 11\,000$krát.

2. Dle Wikipedie[13] váží typický komár $m = 2\,\mathrm{mg} = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg}$ a dokáže létat rychlostí až $v = 2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \doteq 0{,}56\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Při takovémto letu tedy dosahuje energie
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \doteq \frac{1}{2}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}56\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 \doteq 3 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{J}\,.$$
Nyní už nám zbývá jen převést tuto energii na elektronvolty, což je $E_k \doteq 1{,}93 \cdot 10^{12}\,\mathrm{eV} \doteq \doteq 2\,\mathrm{TeV}$. Částice v LHC tedy mají energii jako tři až čtyři letící komáři; mají tak řádově stejnou energii a příměr je opodstatněný.

3. Abychom mohli počítat de Brogliovu vlnovou délku, potřebujeme nejdříve znát hybnost tělesa. Hybnost komára spočítáme podle známého vzorce:
$$p_k = mv = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}56\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}\,,$$
přičemž jsme se nemuseli uchylovat k relativistické fyzice, neboť komárova rychlost se zdaleka neblíží k rychlosti světla. Nyní jeho hybnost dosadíme do vzorce pro de Brogliovu vlnovou délku z Výfučtení.
$$\lambda_k = \frac{h}{p} = \frac{6{,}636 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}}{1{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}} \doteq 6 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{m}\,.$$
Vlnová délka komára je tedy řádově $10^{-28}\,\mathrm{m}$. Je o mnoho řádů menší, než vlnová délka detekovatelná dnešními technologiemi[14] i než komár samotný, proto komára můžeme bez problémů považovat za pevný objekt a počítat s ním podle pravidel klasické fyziky.

Nyní se tedy podíváme na vlnovou délku protonu. Jeho hybnost spočítáme pomocí relativistického vztahu ze zadání (a musíme tak použít relativitu, neboť se rychlost blíží rychlosti světla). Když dosadíme za m hmotnost protonu a následně ostatní veličiny, obdržíme:
$$\begin{aligned} p_p &= \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c} \doteq \\ &\doteq \frac{\sqrt{(7 \cdot 10^{12} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J})^2 - (1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg})^2 \cdot (299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^4}}{299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \doteq \\ &\doteq 3{,}74 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}\,. \end{aligned}$$
Nyní už zbývá jen dosadit do vzorce pro de Brogliovu vlnovou délku:
$$\lambda_p = \frac{h}{p_p} \doteq \frac{6{,}636 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}}{3{,}74 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}} \doteq 1{,}77 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{m}\,.$$

[13] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Kom%C3%A1rovit%C3%AD`
[14] Atomové jádro má řádově velikost $10^{-15}\,\mathrm{m}$.

Tato vlnová délka je o 4 řády menší než rozměr protonu, tedy k relativně přesnému popisu pohybu protonu potřebujeme kvantovou mechaniku. Je to podobné, jako kdybychom u člověka, jehož délka je cca 1 metr, chtěli rozeznat předměty o délce jedné desetiny milimetru. Nemluvě o tom, že při srážce s protonem vzniknou ještě menší částice.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Pořadí řešitelů po I. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**43**
1.	*Kosma Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	5	5	5	6	5	1	5	**32**	**32**
2.	*Helena Rýparová*	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	5	–	–	–	–	7	–	**12**	**12**
3.–4.	*Klára Souza de Joode*	G Jana Keplera, Praha	3	5	–	–	–	–	–	**8**	**8**
3.–4.	*Klára Vildomcova*	ZŠ Divišov	3	5	–	–	–	0	–	**8**	**8**
5.	*Václav Prachař*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	3	–	–	–	–	–	–	**3**	**3**
6.	*Anežka Prachařová*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	2	–	–	–	–	–	–	**2**	**2**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**43**
1.	*Martina Černá*	ZŠ Pardubice – Polabiny	5	5	6	5	7	6	4	**38**	**38**
2.–4.	*Lukáš Kárník*	ZŠ Kostelec nad Černými lesy	5	5	4	6	7	4	2	**33**	**33**
2.–4.	*Jiří Račanský*	G, Brno-Řečkovice	3	5	6	3	7	7	2	**33**	**33**
2.–4.	*Damian Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	5	5	6	6	5	1	5	**33**	**33**
5.–6.	*Jiří Preč*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	3	5	6	6	7	–	2	**29**	**29**
5.–6.	*Bruno Jan Šulc*	G Jindřichův Hradec	4	5	3	6	6	5	–	**29**	**29**
7.–8.	*Ema Kučerová*	G J. Jungmanna, Litoměřice	4	5	2	2	5	6	2	**26**	**26**
7.–8.	*Tereza Sršňová*	G, Budějovická, Praha	3	5	5	–	7	5	1	**26**	**26**
9.–10.	*Eliška Dřínková*	ZŠ a MŠ Nerudova, Č. Budějovice	3	5	6	6	5	–	–	**25**	**25**
9.–10.	*Ester Šlapotová*	G Frýdecká, Český Těšín	4	5	6	–	7	–	3	**25**	**25**
11.–13.	*David Matoušek*	ZŠ Němčice nad Hanou	3	5	5	4	7	–	–	**24**	**24**
11.–13.	*Vojtěch Mišičko*	G, Jateční, Ústí nad Labem	3	5	5	3	6	–	2	**24**	**24**
11.–13.	*Eliška Urbanová*	ZŠ Divišov	5	5	–	–	7	7	–	**24**	**24**
14.	*Matěj Dušek*	ZŠ Roztoky	3	5	3	–	4	6	2	**23**	**23**
15.–18.	*Ondřej Fikr*	G, Litoměřická, Praha	1	5	3	2	5	5	1	**22**	**22**
15.–18.	*Tomáš Viktor Kubíček*	ZŠ a MŠ DOCTRINA, Liberec	5	5	3	0	7	1	1	**22**	**22**
15.–18.	*Jana Novotný*	G, Litoměřická, Praha	3	5	6	–	7	–	1	**22**	**22**
15.–18.	*Lucie Rottová*	G Ústavní, Praha	5	5	6	6	–	–	–	**22**	**22**
19.–20.	*Natálie Boucová*	Masarykovo klasické G, Říčany	5	5	–	4	5	–	2	**21**	**21**
19.–20.	*Petr Švestka*	ZŠ Pardubice – Polabiny	5	5	–	–	5	4	2	**21**	**21**
21.	*Tereza Martišová*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	5	5	2	–	7	–	–	**19**	**19**
22.	*Amelie Vítková*	G a SOŠP, Čáslav	3	2	4	1	4	3	1	**18**	**18**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**43**
23.–24.	*Melánie Boušková*	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	4	5	4	2	2	–	–	**17**	**17**
23.–24.	*Štěpán Stichenwirth*	G J. Vrchlického, Klatovy	3	5	3	–	5	–	1	**17**	**17**
25.	*Bianka Jirátková*	G Z. Wintra, Rakovník	3	5	4	4	–	–	–	**16**	**16**
26.–30.	*Ema Čekalová*	G, Budějovická, Praha	2	5	1	1	4	–	2	**15**	**15**
26.–30.	*Kristýna Kábrtová*	G a SOŠ Havlíčkova, Úpice	2	5	3	–	–	5	–	**15**	**15**
26.–30.	*Adam Ondračka*	ZŠ Pionýrů, Frýdek-Místek	3	5	–	1	6	–	–	**15**	**15**
26.–30.	*Anežka Štulová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	3	3	2	–	2	5	–	**15**	**15**
26.–30.	*Gabriela Volková*	Masarykovo G, Vsetín	5	5	–	–	5	–	–	**15**	**15**
31.–33.	*Pavel Fryjauf*	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	2	5	4	–	3	–	–	**14**	**14**
31.–33.	*Jakub Roštík*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	5	2	–	4	–	–	**14**	**14**
31.–33.	*Bartoloměj Vaníček*	ZŠ Na Šutce, Praha 8 - Troja	5	5	–	–	4	–	–	**14**	**14**
34.	*Vít Novák*	ZŠ Chyšky	3	5	1	2	1	1	–	**13**	**13**
35.	*Barbora Pauková*	G, Litoměřická, Praha	3	5	4	–	–	–	–	**12**	**12**
36.	*Jan Štefanča*	G, Litoměřická, Praha	4	3	0	–	4	–	–	**11**	**11**
37.–38.	*Věra Marie Krejčí*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**10**
37.–38.	*Tomáš Řehák*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**10**
39.	*Matěj Čentík*	G O. Havlové, Ostrava	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**9**
40.	*Mai Chu Nhu*	G, Litoměřická, Praha	3	5	–	–	–	–	–	**8**	**8**
41.	*Leontýna Helena Keates*	Slovanské G, Olomouc	2	3	–	–	2	–	–	**7**	**7**
42.–43.	*Karolína Foltýnová*	ZŠ U Hřiště, Opava	–	5	1	–	–	–	–	**6**	**6**
42.–43.	*Jana Vestfálová*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	4	–	–	2	–	–	**6**	**6**
44.–49.	*Jan Mansfeld*	ZŠ Třebíz	2	3	0	–	0	–	–	**5**	**5**
44.–49.	*Michaela Marešová*	ZŠ Chyšky	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
44.–49.	*Lukáš Matoušek*	G, Česká Třebová	2	3	0	0	–	–	–	**5**	**5**
44.–49.	*Denisa Mazáčová*	Masarykovo G, Vsetín	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
44.–49.	*Vítek Novotný*	G, Blansko	0	0	1	2	2	–	–	**5**	**5**
44.–49.	*Vladimír Tůma*	G Luďka Pika, Plzeň	0	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**38**
1.–2.	*Matouš Mišta*	G, Olomouc-Hejčín	–	5	6	5	7	7	6	**36**	**36**
1.–2.	*David Němička*	G, Rožnov pod Radhoštěm	–	5	6	6	7	5	7	**36**	**36**
3.	*Jindřich Urban*	ZŠ Divišov	–	5	6	4	7	7	3	**32**	**32**
4.	*Magdalena Hybnerová*	G, Jateční, Ústí nad Labem	–	5	6	6	6	5	3	**31**	**31**
5.	*Eva Barčová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	4	7	4	4	**30**	**30**
6.	*Sebastian Ray*	ZŠ Školní, Bechyně	–	5	6	3	7	7	1	**29**	**29**
7.–9.	*Renata Brázdová*	ZŠ a MŠ Kameničky	–	5	4	6	7	6	–	**28**	**28**
7.–9.	*Klára Rašková*	Gymnázium Brno-Bystrc	–	5	4	2	5	7	5	**28**	**28**
7.–9.	*Ivan Žemlička*	G Ústavní, Praha	–	5	4	1	7	7	4	**28**	**28**
10.	*Jan Souchop*	G, Mikulov	–	5	6	3	7	–	5	**26**	**26**
11.	*Adam Bretšnajder*	G Z. Wintra, Rakovník	–	5	3	5	5	4	3	**25**	**25**
12.	*Václav Verner*	PORG, Praha	–	5	6	5	4	–	4	**24**	**24**
13.	*Václav Vostal*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	5	3	6	5	–	4	**23**	**23**
14.–15.	*Daniel Rýpar*	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	–	5	3	–	7	7	–	**22**	**22**
14.–15.	*Pavla Šimová*	G, Šumperk	–	5	6	–	7	–	4	**22**	**22**
16.–17.	*Vít Němec*	ZŠ a MŠ Tasovice	–	5	3	4	4	4	1	**21**	**21**
16.–17.	*Agáta Anna Štěpánová*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	5	4	6	5	–	1	**21**	**21**
18.–19.	*Adam Černý*	G Ústavní, Praha	–	5	4	–	7	–	3	**19**	**19**

	jméno *Student Pilný*	škola MFF UK	1 5	2 6	3 6	4 7	5 7	E 7	V 7	I **38**	Σ **38**
18.–19.	*David Vedral*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	5	2	1	6	–	5	**19**	**19**
20.	*Pavel Šimůnek*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	–	5	6	–	7	–	–	**18**	**18**
21.	*Alexander Adámek*	ZŠ Hostýnská, Praha 10	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**17**
22.–26.	*Jakub Drábek*	Slovanské G, Olomouc	–	5	1	1	5	–	4	**16**	**16**
22.–26.	*Radim Gabriel*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	5	0	5	0	1	**16**	**16**
22.–26.	*Antonie Kynčlová*	ZŠ Herčíkova, Brno	–	5	2	3	2	4	–	**16**	**16**
22.–26.	*Jakub Merta*	ZŠ Brno - Bystrc	–	5	3	3	3	–	2	**16**	**16**
22.–26.	*Kristýna Šeděnková*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	4	–	2	5	–	**16**	**16**
27.–30.	*Jan Kroupa*	ZŠ T. G. Masaryka Klatovy IV	–	5	6	4	–	–	–	**15**	**15**
27.–30.	*Karel Kubeš*	G, Písek	–	5	1	2	3	3	1	**15**	**15**
27.–30.	*Františka Kynčlová*	ZŠ Herčíkova, Brno	–	5	1	3	3	3	–	**15**	**15**
27.–30.	*Matěj Šicner*	Cyrilomet. G a SOŠ pg., Brno	–	5	1	–	5	–	4	**15**	**15**
31.–33.	*Tomáš Dokulil*	G Jírovcova, České Budějovice	–	5	1	–	5	–	2	**13**	**13**
31.–33.	*Magdaléna Jůzová*	ZŠ Brno - Bystrc	–	5	3	1	2	1	1	**13**	**13**
31.–33.	*Kateřina Stefanová*	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	5	6	–	–	–	2	**13**	**13**
34.–36.	*Lukáš Albrecht*	ZŠ, Liberec, Oblačná	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**11**
34.–36.	*Rebeka Heřmanová*	G Jana Keplera, Praha	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**11**
34.–36.	*Oliver Kodyš*	G Z. Wintra, Rakovník	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**11**
37.–39.	*Jiří Cepník*	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	5	3	2	–	–	–	**10**	**10**
37.–39.	*Romana Kolembusová*	ZŠ Šumperk, Šumavská 21	–	5	3	0	2	–	–	**10**	**10**
37.–39.	*Matěj Krátký*	G, Jihlava	–	5	1	0	4	–	–	**10**	**10**
40.–43.	*Teo Bumbálek*	Mendelovo G, Opava	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
40.–43.	*Vojtěch Fajstl*	ZŠ a MŠ Ptení	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
40.–43.	*Lukáš Hrdý*	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
40.–43.	*Klára Řeháková*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
44.	*Tomáš Bořil*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	3	–	–	–	–	–	**3**	**3**

Kategorie devátých ročníků

	jméno *Student Pilný*	škola MFF UK	1 5	2 6	3 6	4 7	5 7	E 7	V 7	I **38**	Σ **38**
1.	*Vojtěch Kadeřábek*	G Mensa, Praha	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**38**
2.	*Lukáš Linhart*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	5	6	6	6	7	7	**37**	**37**
3.	*Anežka Čechová*	G, Mikulov	–	5	6	4	7	7	4	**33**	**33**
4.	*Lukáš Rella*	G, Dačice	–	5	6	5	5	5	3	**29**	**29**
5.	*Šimon Genčur*	Biskupské G, Brno	–	5	6	6	5	–	5	**27**	**27**
6.	*Daniel Čtvrtečka*	G, Budějovická, Praha	–	5	3	5	7	–	6	**26**	**26**
7.	*Richard Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	6	–	7	7	–	**25**	**25**
8.	*Markéta Poláčková*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	5	3	1	5	7	3	**24**	**24**
9.	*Jakub Turner*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	5	3	6	5	–	4	**23**	**23**
10.	*Ivana Ludvíková*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	5	4	6	5	–	2	**22**	**22**
11.	*Johana Vaníčková*	G, Českolipská, Praha	–	5	3	–	6	6	–	**20**	**20**
12.	*Jakub Mašek*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	5	–	6	–	–	–	**11**	**11**
13.	*Zuzana Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	5	5	–	–	–	–	**10**	**10**
14.–15.	*Jan Kouba*	G, Prachatice	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
14.–15.	*Kristián Matúš*	ZŠ a MŠ Veřovice	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.