



Seriál: Zpracování experimentů

V tomto Výučení se budeme věnovat zpracování experimentálních měření. Nejprve se budeme bavit o obecných pravidlech, co a jak máme udělat. Pak si povíme o samotném měření a naučíme se správně odhadovat chyby takového měření. Dále se naučíme počítat průměry a jejich chyby. Úplně na závěr pohovoříme o diskuzi, která je neméně důležitou částí kvalitního experimentálního řešení.

Úvodní teorie

Provádíte-li experiment, měli byste si nejdříve rozmyslet, co a jak budete měřit. Jakou veličinu vlastně měříte, jak se případně bude dopočítávat a jakou má jednotku. Vyvarujete se tak kritickým momentům, kdy zjistíte, že jste měli měřit i něco dalšího a experiment musíte provádět znovu.

Těž je dobré popřemýšlet, jaké pomůcky budou k měření potřeba. To proto, abyste během měření například nezjistili, že vám k měření teploty chybí teploměr, nebo máte příliš krátké pravítko. Mohou to být ale i drobnosti, které se ukáží důležité, třeba že vám bude chybět nějaký podstavec, zarážka apod.

Zároveň je také vhodné předem zauvažovat, k čemu byste měli dojít a po měření uvážit, zda-li by výsledek mohl odpovídat realitě. Pokud jste změřili rychlost větru rovnou $250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, asi je něco špatně.

Měření

Ve fyzice musíme hodně veličin měřit několikrát, opakovaně. Naopak, jiné veličiny proměříme jenom jedenkrát.

Jednou se měří třeba rozměry dřevěného kvádrů, neboť kvádr během měření pravděpodobně nepovyroste a jeho rozměry zůstanou pořád stejné. Stejně tak jednou proměříme i hmotnost závaží či vaši výšku.

Ovšem jsou i měření, která byste měli opakovat vícekrát, jelikož je neumíme dostatečně přesně změřit napoprvé. Pokud měříte dobu kmitu kyvadla, při stisku tlačítka stopek se můžete zpozdit kvůli reakci člověka až o několik desetin sekundy, což při pouhém jednom měření často nebude zanedbatelný rozdíl. Vaše výsledky pak mohou být poněkud zkreslené. Další důvod, pro který je dobré některá měření opakovat vícekrát, jsou samotné fyzikální děje, které se při měření uplatňují. Často stačí jen nepatrná změna podmínek během experimentu (zavane vítr, změní se tlak vzduchu v místnosti apod.), a ta se v měřených číslech projeví. Ideální je proto měření opakovat desetkrát.

Roky zkušeností již ukázaly, že je velmi dobré si během měření psát hodně poznámek. Hlavně kvůli tomu, abyste se ve svých zápiscích vyznali i na další den, ale i proto, abyste věděli, jak jsou vaše měření kvalitní. Máte-li pocit, že tentokrát jste stopky zastavili o kousíček později, než byste mohli, je lepší toto měření škrtnout a změřit čas znovu. Důvod? S precizněji naměřenými hodnotami získáváme menší chyby měření.

Průměrná hodnota měření

Předpokládejme, že předešlé dva body jsme již naplnili a získali jsme deset měření dané veličiny a , ozn. a_1 až a_{10} . Na následujících řádcích si ukážeme, jak z těchto čísel získat výslednou hodnotu.

Nejdříve spočítáme *aritmetický průměr* naměřených hodnot. Tak dostaneme *průměrnou* hodnotu veličiny a , kterou značíme buď \bar{a} nebo $\langle a \rangle$. Aritmetický průměr pro n (například 10) měření vypadá následovně

$$\langle a \rangle = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}.$$

Odchylky měření

Jak je nám známo ze zkušenosti nebo z hodin fyziky, při měření dochází vždy k nějakým odchylkám, kterým nelze jednoduše zabránit.¹ Rozlišujeme dva typy odchylek – přístrojové a statistické.

Odchylka pomůcek použitých při měření se určí jako polovina nejmenšího dílku na použité stupnici. Například klasické 30cm pravítko má odchylku 0,5 mm, protože má dílky rozdělené po 1 mm.

Na digitálních přístrojích (například vahách) bývá odchylka někde napsaná, takže je její určení o mnoho snadnější. Pokud na nich odchylka napsána není, tak platí pravidlo zmíněné výše. Měříme-li například napětí voltmetrem a naměříme napětí 4,24 V, pak bude odchylka rovna 0,005 V

Někdy je potřeba odchylku rozumně odhadnout, neboť nelze jednoduše vypočítat. Kupříkladu měření 10m tyče obyčejným pravítkem má rozhodně větší chybu měření, než je polovina nejmenšího dílku na stupnici. Zde bude chyba jistě mnohem vyšší, pravděpodobně několik cm.

Měříme-li opakovaně, chyba průměrné hodnoty $\langle a \rangle$ bývá nižší, než chyba jediného měření. Jedním ze způsobů, jak určit chybu průměrné hodnoty je spočítat *absolutní chybu*

$$\Delta a = \frac{|a_1 - \langle a \rangle| + |a_2 - \langle a \rangle| + |a_3 - \langle a \rangle| + \dots + |a_n - \langle a \rangle|}{n},$$

kde a_n je hodnota daného měření a $\langle a \rangle$ je aritmetický průměr všech naměřených hodnot.

S touto chybou ale mívají fyzici často problém. Všimněte si, že budeme mít stejnou odchylku, když provedeme 5 měření, jako když provedeme 50 měření. Neboť naměříme-li 5 měření, tak se odchylky vysčítají na určitou hodnotu dělenou pěti, ale padesát měření se vysčítá na desetinásobek, který vydělený 50 dá (přibližně) stejné číslo.

Proto se zavedl vzorec střední směrodatné odchylky, který se dnes běžně při měření používá. Tato odchylka se většinou značí řeckým písmenem σ (sigma):

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{(a_1 - \langle a \rangle)^2 + (a_2 - \langle a \rangle)^2 + (a_3 - \langle a \rangle)^2 + \dots + (a_n - \langle a \rangle)^2}{n(n-1)}},$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \langle a \rangle)^2}{n(n-1)}}.$$

Vzoreček možná nevypadá hezky, ale není na něm nic komplikovaného. Jednoduše od každé naměřené hodnoty a_i odečteme průměrnou hodnotu. Pak tyto čísla umocníme na druhou a

¹Dokonce kvantová fyzika výslovně *zakazuje* provádět přesná měření atomů a částic.

sečteme. Součet vydělíme počtem měření n , a pak ještě číslem o jedna menším. Výsledek nakonec odmocníme a dostáváme směrodatnou odchylku.

Tento způsob počítání odchylek zvýhodňuje ty, kteří měření opakovali několikrát, oproti těm, kteří ho opakovali jen dvakrát či třikrát. Představme si měření, kde naměříme pouze 3 hodnoty a měření, kde naměříme kompletních 10 hodnot se stejnou chybou jednoho měření. Pro tři měření dělíme součet tří chyb šesti, pro 10 měření ale dělíme součet deseti chyb devadesáti. Konečná chyba po odmocnění bude tedy asi 2,5-krát menší.

I proto doporučujeme používat tento vzorec. Vaše měření budou díky tomu přesnější a též budou působit profesionálněji.

Často se stává, že neměříme jenom jednu, ale rovnou více veličin, se kterými dále pracujeme. Například při měření rychlosti umíme měřit dráhu s a čas t , přičemž rychlost spočítáme jako $v = s/t$. Teď si ale představme, že pro dráhu i čas známe jak aritmetický průměr několika měření, tak jeho odchylku. Jak určíme hodnotu a odchylku rychlosti?

Není to velmi složité, stačí si pouze zapamatovat několik pravidel. Hodnotu rychlosti (nebo jiné veličiny, kterou chceme spočítat) zjistíme tak, že do vzorečku $v = s/t$ dosadíme průměrné hodnoty. Pro odchylku rychlosti pak použijeme jedno z pravidel:

$$\begin{array}{l} c = a + b \\ c = a - b \end{array} \quad \longrightarrow \quad \sigma_c = \sigma_a + \sigma_b, \quad \begin{array}{l} c = a \cdot b \\ c = \frac{a}{b} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_c}{c} = \frac{\sigma_a}{a} + \frac{\sigma_b}{b},$$

kde σ_a a σ_b jsou odchylky dvou naměřených veličin a σ_c je odchylka výsledné veličiny.

Jednoduše si to lze zapamatovat tak, že při sčítání a odčítání se odchylky sčítají, ale při násobení a dělení se sčítají *relativní odchylky*. Relativní odchylka je jednoduše číselná hodnota odchylky vydělená hodnotou samotné veličiny. Často se udává v procentech.

Zaokrouhlování

Hodnotu veličiny a její chyby je nakonec potřeba rozumně zaokrouhlit. Obvykle zaokrouhlujeme na tři platné číslice. To v praxi znamená, že ponecháme pouze 3 číslice, které nejsou nuly (na začátku anebo konci čísla). Takže hodnotu $m = 0,002586$ kg zaokrouhlíme na $m = 0,00259$ kg, protože zaokrouhlení na tři desetinná místa by znamenalo, že jsme naměřili nulu. To ale není pravda, neboť nějakou, byť malou, váhu jsme naměřili.

Odchylky zaokrouhlujeme na stejný počet desetinných míst jako výsledek. Rozdíl je však v tom, že odchylky zaokrouhlujeme nahoru, neboť si nemůžeme odchylku jen tak snížit. Chceme-li odchylku $\pm 0,001$ m zaokrouhlit na setiny, výsledek bude $\pm 0,01$ m.

Zápis výsledku

Jakmile uskutečníme dostatečný počet měření, spočítáme průměrné hodnoty, směrodatné odchylky a chyby správně zaokrouhlíme, můžeme zapsat výsledek. Obvykle má tvar

$$\text{veličina} = (\text{průměrná hodnota} \pm \text{směrodatná odchylka}) \text{ jednotka.}$$

Diskuze

Diskuze je neméně důležitou součástí řešení. Měli byste v ní popsat, jakých chyb jste se dopustili, co mělo na vaše měření vliv a co vlastně vaše výsledky znamenají. Nebojte se nešetřit komentáři.

Je dobré také popsat, proč byla vaše metoda přesná, nebo proč vám měření nevyšlo. Potom z vás budou skvělí experimentátoři!

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.