

Úloha III.2 ... Limonádový Dan

5 bodů; průměr 3,61; řešilo 51 studentů

Dan si při sledování svého oblíbeného filmu *Limonádový Joe* vzpomněl, jak si v létě za deštivého dne koupil svoji oblíbenou Kolalokovu limonádu. Intenzita deště tehdy byla $R = 1 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$ (za minutu dosáhla nově spadlá vrstva nevsáknuté vody výšky jednoho milimetru). Dan má limonádu rád v kelímcích o poloměru $r = 2,5 \text{ cm}$ a nejraději ji upíjí pravidelně každých deset minut.



Kolik limonády musí takto pravidelně upíjet, aby hladina v kelímku zase klesla na úroveň před deseti minutami, tedy mu vlastně neubývala?

Jestliže si koupil $V_0 = 3 \text{ dl}$ limonády, která je 50% roztokem chutné složky ve vodě, určete, za jak dlouho nebude Dan chtít limonádu pít. Jeho mez chutnosti pro limonádu (nejnižší hodnota koncentrace, při které mu ještě chutná) je už na $C_h = 45\%$.

Počítejte s tím, že hned po nákupu limonády Dan nejprve čeká deset minut a až pak upije.

Chceme zjistit, kolik limonády musí Dan vypít, aby se hladina po dešti dostala na původní hodnotu. Hledáme tak v podstatě objem vody, která naprší za 10 minut. Tento objem bude záviset na dvou veličinách: na ploše S , na které déšť sbíráme, a výšce h , o kterou stoupne hladina v kelímku. To lze zapsat matematicky následovně:

$$V = Sh.$$

Tyto veličiny si ovšem musíme nějak vyjádřit i pomocí nám známých veličin. Vzhledem k tomu, že jsou kelímky kruhového tvaru, bude pro plochu S platit vzorec pro obsah kruhu $S = \pi r^2$.

Výšku vody h vyjádříme z intenzity deště. Pokud máme intenzitu $R = 1 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$, znamená to, že za každou jednu minutu naprší jeden milimetr vody. Pokud chceme zjistit, o kolik se zvýší hladina za určitý čas, musíme intenzitu tímto časem vynásobit, neboli platí $h = Rt$.

Když dosadíme S a h do předchozího vztahu, získáme rovnici

$$V = \pi r^2 Rt,$$

ve které již známe všechny proměnné a můžeme je dosadit¹

$$V = \pi \cdot (2,5 \text{ cm})^2 \cdot 0,1 \text{ cm} \cdot \text{min}^{-1} \cdot 10 \text{ minut}$$

$$V \doteq 19,63 \text{ cm}^3$$

Dan po 10 minutách musí vypít $V \doteq 19,63 \text{ cm}^3 = 0,1963 \text{ dl}$ limonády.

Nyní přejdeme k výpočtu toho, jak dlouho může Dan limonádu pít, aby mu stále chutnala. Pokaždé, když do sklenice naprší, koncentrace chutné složky v limonádě se zmenší. Když se poté Dan napije, upije nejen vody, ale také samotné šťávy. To sice koncentraci nezmění, ale změní to celkový objem šťávy, který se ve sklenici nachází. Tím ovlivní budoucí ředění, protože se již nebude ředit stejný objem šťávy.

Změnu koncentrace při napršení do kelímků můžeme vyjádřit obecně pro C_1 a C_2 , kde C_1 je počáteční koncentrace po předchozím upití (tj. ve sklenici je objem V_0) a C_2 je koncentrace po napršení, ale před následujícím upitím (tj. ve sklenici je objem $V_0 + V$).

¹Samozřejmě nesmíme zapomenout převést hodnoty na stejné jednotky.

Pokud začínáme s koncentrací C_1 a objemem V_0 , musí být objem samotné šťávy, která se nachází v roztoku, $C_1 V_0$. Koncentrace se přidáním vody zmenší. Když chceme vyjádřit novou koncentraci C_2 , musíme objem chutné složky vydělit celkovým objemem před napitím (ale po napršení), což je $V_0 + V$. Z toho následně získáváme výslednou koncentraci C_2 jako

$$C_2 = \frac{C_1 V_0}{V_0 + V}.$$

Tím jsme si vyjádřili, jak se po každých 10 minutách změni koncentrace oproti té předchozí. Získání času, kdy limonáda nebude dostatečně koncentrovaná, je nyní otázkou aplikování této rovnice jednotlivě pro každých 10 minut. Pro zjednodušení si ovšem můžeme pomoci tabulkovými programy, jakými jsou například Excel nebo OpenOffice Calc, do kterých můžeme rovnici pouze zadat a ony nám již vypočítají jednotlivé koncentrace.

| $\frac{t}{\text{min}}$ | C |
|------------------------|---------|
| 0 | 50,00 % |
| 10 | 46,93 % |
| 20 | 44,05 % |
| 30 | 41,34 % |
| 40 | 38,80 % |
| 50 | 36,42 % |
| 60 | 34,18 % |
| 70 | 32,08 % |
| 80 | 30,11 % |

Tab. 1: Koncentrace limonády v průběhu času.

Z tabulky 1 můžeme vidět, že koncentrace limonády klesne pod $C_h = 45\%$ už po 20 min. Dan se tak napíše s chutí jen jednou, protože podruhé už bude mít limonáda v sobě málo šťávy.

Adam Krška

adam@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.