Úloha III.V ... Bez driblování

7 bodů; průměr 4,24; řešilo 21 studentů

1. *Při volejbalu hodil Jirka svému kamarádovi vzdálenému* 10 m *míč na druhou půlku hřiště, ten ho obdržel za dvě pětiny sekundy. Mohl mu v chycení míče zabránit protihráč Aleš, který stál v polovině mezi oběma kamarády a je o* 30 cm *vyšší než bod, ze kterého Jirka hodil míč?*

2. *LeBron si ve volném čase házel míčem do koše tak, že vyskočil a házel tak ze stejné výšky jako koš. Protože házel z celé půlky hřiště, divil se mu jeho kamarád Kobe, že má tak přesné ruce, že se pokaždé trefí. Jestliže míč dosáhl maximální výšky* 2 m *nad košem, jakou největší rychlost do strany může míč mít, aby za dobu letu neuhnul z rovné dráhy o více než* 23 cm*, což je poloměr koše? V takovém případě by se LeBron již netrefil, ale on se přece trefí vždy.*

1. Abychom zjistili, zda Aleš může přihrávce zabránit, musíme vypočítat výšku, jakou bude mít míč v polovině letu. Přesně tam totiž míč dosáhne nejvyššího bodu své dráhy. Pro tuto výšku platí vztah

$$h_{\mathrm{max}} = \frac{v_0^2}{2g}\,,$$

kde v_0 je vertikální složka počáteční rychlosti a g je tíhové zrychlení. Nyní tedy ještě musíme dopočítat onu rychlost v_0. To můžeme pomocí vztahu pro výpočet času výstupu z Výfučtení

$$t_{\mathrm{v}} = \frac{v_0}{g}\,.$$

Z něho vyjádříme rychlost v_0

$$v_0 = g t_{\mathrm{v}}\,.$$

Tuto rychlost nyní můžeme dosadit do vztahu pro výpočet maximální výšky. Musíme si jen dát pozor na to, že čas výstupu je polovinou celkového času letu, tudíž nejvyššího bodu dosáhne míč za čas $t_{\mathrm{v}} = 0{,}2\,\mathrm{s}$. Náš vztah pro výpočet maximální výšky je tedy

$$h_{\mathrm{max}} = \frac{g^2 t_{\mathrm{v}}^2}{2g} = \frac{1}{2} g t_{\mathrm{v}}^2\,,$$

přičemž tento vztah také můžeme znát z výpočtu dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu. Nyní tedy můžeme dosadit zadané číselné hodnoty:

$$h_{\mathrm{max}} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot (0{,}2\,\mathrm{s})^2 \doteq 0{,}2\,\mathrm{m}\,.$$

Jak ale víme, Aleš je vyšší o 30 cm než místo hodu, tudíž míč může zachytit s rezervou 10 cm. Můžeme si také všimnout, že výška nejvyššího bodu vůbec nezávisí na délce hodu, pouze na době letu.

2. Vzhledem k tomu, že víme, jak velkou vzdálenost může míč urazit do strany, tak k vypočítání rychlosti potřebujeme znát jen dobu letu míče. K tomu využijeme zadanou maximální výšku h míče nad košem. V první části úlohy jsme již odvodili vztah mezi maximální výškou a dobou výstupu. Ten tedy nyní můžeme využít k dopočítání času t_v, který zabere výstup
$$h = \frac{1}{2} g t_\mathrm{v}^2 \,.$$

   Ze vztahu vyjádříme dobu výstupu
$$t_\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2h_\mathrm{max}}{g}} \,.$$

   Nás ovšem zajímá hlavně celková doba letu t. Ta odpovídá dvojnásobku doby vzestupu, tedy
$$t = 2\sqrt{\frac{2h_\mathrm{max}}{g}} \,.$$

   Nyní, když už jsme vypočítali čas, nám stačí pouze dosadit do vzorce pro výpočet rychlosti rovnoměrného pohybu (neboť rychlost do strany si míč po celou dobu letu zachová, takže se jedná o rovnoměrný pohyb)
$$v = \frac{s}{t} = \frac{s}{2\sqrt{\frac{2h_\mathrm{max}}{g}}} \,,$$

   kde s je dráha, kterou míč urazí směrem do strany (v našem případě se jedná o poloměr koše). Nyní už nám stačí dosadit zadané číselné hodnoty a vypočítat výsledek:
$$v = \frac{0{,}23\,\mathrm{m}}{2\sqrt{\frac{2\cdot 2\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}}} \doteq 0{,}18\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \,.$$

   LeBron tedy může míči do strany udělit rychlost maximálně $0{,}18\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ neboli $18\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$.

Aleš Opl
ales@vyfuk.mff.cuni.cz