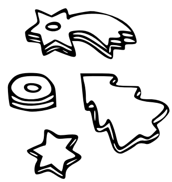
Úloha III.1 . . . Vánoční dláždění

5 bodů; (chybí statistiky)

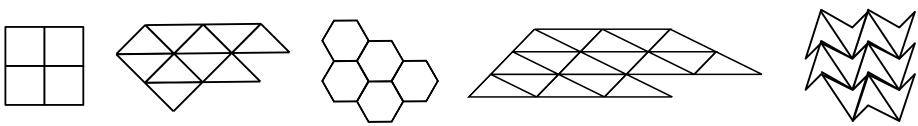


Eva pekla vánoční cukroví a jednu várku kompletně spálila, Aleš ji ale uklidnil, že to ještě není nejhorší. Třeba Pat a Mat – ti když pekli, bylo to tak tvrdé, že si z toho vydláždili chodník. Eva se zeptala, jestli by se z jejích lineckých komet dal dláždit nekonečný prostor. Aleš jí odpověděl, že ne, a oba začali přemýšlet, jaké jiné cukroví by Eva měla upéct, aby se jí to podařilo.

Dokažte, že se nekonečná plocha dláždit dá, a vymyslete alespoň 5 různých tvarů, kterými to lze (jako bonus můžete vymyslet nějaký typický tvar vánočního cukroví).

Vyplněním nekonečné plochy neboli *teselací* se zabýval již slavný matematik a astronom Johannes Kepler. Ten ve své knize *Harmonices mundi* ukázal, že z pravidelných mnohoúhelníků jde roviny pokrýt pouze třemi, a to rovnostranným trojúhelníkem, čtvercem a pravidelným šestiúhelníkem. Abychom mohli dláždit nekonečnou plochu, musí být součet vnitřních úhlů útvarů stýkajících se v jednom bodě $360°$, tedy plný úhel. Jelikož pravidelné mnohoúhelníky mají všechny vnitřní úhly stejné a jasně dané typem mnohoúhelníku, musí pro hledaný útvar platit, že $360°$ je celočíselným násobkem vnitřního úhlu. Ten je pro trojúhelník $60°$, pro čtverec $90°$ a pro šestiúhelník $120°$, tedy po řadě šestina, čtvrtina a třetina plného úhlu. Můžete si rozmyslet, že žádným z jiných pravidelných mnohoúhelníků již nemůžeme rovinu pokrýt, protože všechny musí mít velikost vnitřních úhlů menší než $180°$.

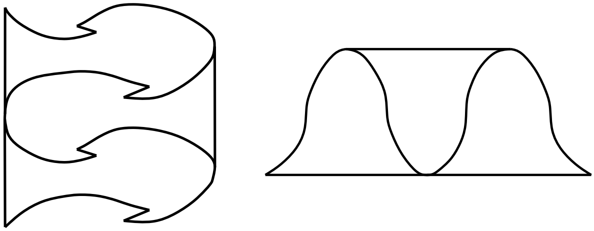
Podívejme se však i na nepravidelné útvary. Z těch se dá rovina pokrýt libovolným obecným trojúhelníkem, libovolným (i tzv. nekonvexním) čtyřúhelníkem a některými speciálními typy pětiúhelníků a šestiúhelníků. Dláždění všemi pravidelnými a dvěma nepravidelnými mnohoúhelníky můžete vidět na obrázku 1.



Obr. 1: Nekonečné řady nepravidelných tvarů

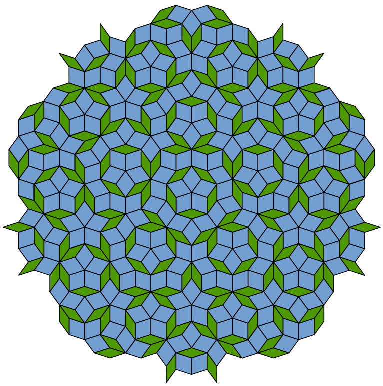
My jsme se ptali na tvar vánočního cukroví, pochybujeme však, že Eva pekla cukroví ve tvaru šestiúhelníků. Útvarů, kterými jde vydláždit rovina, je totiž více, jen se již nemusí jednat o zmíněné mnohoúhelníky. Jiný obrazec vyplňující rovinu můžeme vytvořit tak, že z jedné strany čtverce nebo šestiúhelníku vystřihneme útvar a ten nalepíme na protější stranu nebo na sousední stranu otáčením do jednoho směru. Z tvarů typických pro vánoční cukroví tak můžou rovinu vyplnit například stromečky, zvonky nebo ryby (obr. 2).

Vyplňování roviny různými útvary není pouze záležitostí matematiky, ale setkáváme se s ním v mnoha různých oborech. Již od starověku se zdobí stěny chrámů barevné mozaiky a tato výtvarná technika nezůstává pozadu ani ve dvacátém století u M. C. Eschera. Dále vyplňování roviny nalezneme v přírodě například u včelích pláství, které mají šestiúhelníkový tvar, u vyplnění tkáně buňkami či u sloupů čedičových skal (tzv. varhany, v České republice např. Panská skála u České Skalice). Tvary vyplňující rovinu mají rovněž využití v krystalografii, třeba u kubické krystalové mřížky s rovinami tvořenými čtverci nebo například u grafitu, jehož roviny jsou tvořeny šestiúhelníky.



Obr. 2: Nekonečné řady vánočního cukroví

I přes svou zdánlivou jednoduchost není problém dláždění roviny zcela vyřešen. Problémem dláždění omezeným množstvím tvarů, které není periodické (přesunutím jedné části nikdy nedostaneme shodu s jinou), ale vykazuje jisté náznaky symetrie, se zabýval i Roger Penrose.[1] Nejjednodušší Penroseovo dláždění je složeno ze dvou kosočtverců. Pevné látky, které vykazují takovéto uspořádání, byly v roce 1982 skutečně objeveny a nazýváme je kvazikrystaly.



Obr. 3: Jeden z mnoha typů Penroseova dláždění.

Kateřina Rosická
`kackar@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[1] nositel Nobelovy ceny za fyziku 2020 za výzkum černých děr