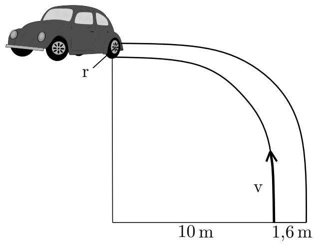
Úloha III.3 ... Diferenciální počet

6 bodů; (chybí statistiky)

Lidové přísloví říká, že čert se skrývá v maličkostech, a obzvláště mnoho se jich nachází u konstrukce auta. Jako nadějní mladí inženýři byste mohli sestrojit účinný motor, připevnit jej na kola spojená tyčí a vyrazit na cestu. Nicméně v nejbližší zatáčce byste zažili první překvapení. Vzhledem k tomu, že vaše auto má nezanedbatelnou šířku, by se kola v zatáčce otáčela s rozdílnými rychlostmi, což by autu nesvědčilo.

Ke skutečným autům je připojena součástka s názvem diferenciál, jejímž úkolem je řešit rozdílné rychlosti otáčení kol, pojďme se však podívat, jak markantní tento rozdíl v reálné situaci je.



Obr. 1: Průjezd auta zatáčkou

Představme si např. Škodu Favorit jedoucí do levotočivé zatáčky o vnitřním poloměru $10\,\mathrm{m}$ *rychlostí* $v = 30\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. *Vzdálenost kol od sebe je cca* $1{,}6\,\mathrm{m}$ *a jejich poloměr je* $r = 34\,\mathrm{cm}$. *Představte si pro zjednodušení, že obě přední kola cestují po soustředných kružnicích.*

1. *Je-li* v *rychlost levého kola, jakou frekvencí (tj. kolikrát za sekundu) se kolo otáčí kolem své osy?*

2. *Jakou frekvencí se otáčí kolem své osy pravé kolo a jaký je to rozdíl?*

Počítejte s tím, že obě kola neprokluzují.

Naše řešení bude vycházet z úvahy, že perioda T, za kterou se levé kolo stihne otočit, je podílem jeho obvodu o a obvodové rychlosti v (stejná jako rychlost celého auta). Toto platí právě díky tomu, že kolo nepodkluzuje. Frekvenci f přímočaře vyjádříme z definice jako převrácenou hodnotu periody a obvod kola vypočítáme z poloměru r uvedeného v zadání. Nesmíme jej, stejně jako rychlost automobilu, zapomenout dosadit v základních jednotkách.

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{o}{v}} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{\frac{30}{3{,}6}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{2\pi \cdot 0{,}34\,\mathrm{m}} \doteq 3{,}9\,\mathrm{Hz}$$

Všimněme si, že v druhé části úlohy můžeme použít ten samý vzorec, pouze do něj musíme dosadit jinou obvodovou rychlost v_2. Kola konají dvojí rotační pohyb, kolem své osy a kolem osy otáčení celého automobilu. Nás bude tentokrát zajímat druhý zmíněný, neboť pro něj platí, že se obě kola otáčejí stejnou úhlovou rychlostí. Tu lze spočítat jako podíl obvodové rychlosti a poloměru části kružnice, kterou opisují. Označme si vnitřní poloměr zatáčky s a vzdálenost kol od sebe d. Potom platí následující rovnost:

$$\frac{v}{s} = \frac{v_2}{d + s}\,.$$

Z ní si vyjádříme rychlost v_2.

$$v_2 = \frac{v(d + s)}{s}$$

Nakonec nám po jejím dosazení do původní rovnice vyjde frekvence f_2:

$$f_2 = \frac{v_2}{2\pi r} = \frac{\frac{v(d+s)}{s}}{2\pi r} = \frac{v(d + s)}{2\pi r s} = \frac{\frac{30}{3{,}6}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}(1{,}6\,\mathrm{m} + 10\,\mathrm{m})}{2\pi \cdot 0{,}34\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m}} \doteq 4{,}5\,\mathrm{Hz}$$

Na první pohled vidíme, že se frekvence f_1 a f_2 výrazně liší. Vidíme, že jednoduše spojit obě kola pevnou tyčí by nefungovalo: rozdíl rychlostí by mohl snadno vést ke smyku a ke ztrátě přilnavosti k povrchu, a právě proto musí být součástí nápravy diferenciál, který jej dokáže odstranit.

Viktor Materna
materna@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.