výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

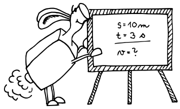
právě čtete šestou brožurku letošního ročníku Výfuku. Naleznete v ní zadání 6. série, kde zjistíte, jaké jsou podmínky pro plavání lodě nebo proč jsou pračky tak těžké a detailně se podíváte na kouzelnické triky. Čeká vás i experimentální úloha s konstrukcí čočky i letošní poslední Výfučtení věnované statice. Již tradičně v brožurce naleznete vzorová řešení a pořadí čtvrté série.

S touto sérií však Výfuk nekončí, stejně jako loni se můžete těšit na prázdninové série s kvízem či experimenty.

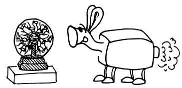
Ačkoliv nám pandemická situace stále neumožňuje pořádat prezenční akce, proběhne i letošní jarní setkání online přes Discord. Další informace se budou postupně objevovat na našem webu.

Dále jsme již spustili přihlašování na náš letní tábor, který by měl proběhnout klasicky prezenčně od 25. 7. do 7. 8. v Celném. Pokud jsi nám ještě nedal vědět, zda máš o tábor zájem nebo ne, učiň tak prosím co nejdříve, nejpozději však do konce května, ať můžeme zvát náhradníky.

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

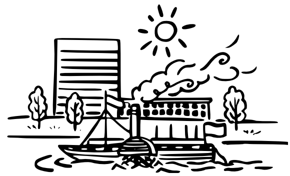


Zadání VI. série



Termín odeslání: 17. 5. 2021 20.00

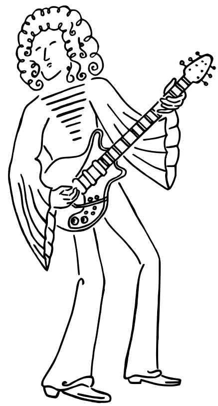
Úloha VI.1 ... Parník ❻ ❼ 5 bodů



Organizátoři Výfuku přemýšleli, co si pořídí k výročí 10. ročníku, a napadlo je koupit si parník, aby s ním mohli brázdit Vltavu před budovou Matfyzu v Troji. Aby si jej ale mohli dovolit, potřebují naspořit 6,2 milionu korun. Momentálně mají dohromady pouze 5 milionů. Rozhodli se proto, že si své úspory uloží do banky s výhodným spořicím úrokem 2 % a počkají, až jim díky němu finance narostou.

Určete, za kolik let budou mít organizátoři Výfuku díky bance potřebných 6,2 milionu korun na koupi parníku.

Úloha VI.2 ... Queen of resonance ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů



Když hudební skupina Queen nahrávala svou ikonickou skladbu *We Will Rock You*, chtěla do rytmu písně přidat zvuk dupotu davu lidí. Jelikož u sebe ale zrovna neměla své věrné fanoušky, rozhodla se improvizovat. Napadlo ji nahrát několik po sobě jdoucích dupnutí, a tak vytvořit iluzi davu. Při pokusech se ale vyskytl problém – jak velké rozestupy mají zvuky tvořící davové dupnutí mít? Při pravidelných rozestupech bude výsledný zvuk připomínat spíše ozvěnu nežli dav. Pojďme jim pomoct!

Nahrávání skladby probíhá ve čtvercové místnosti o rozměrech 9×9 metrů. Člen kapely Queen stojí $s = 1{,}5\,\mathrm{m}$ od středu místnosti. Mikrofon je taktéž ve vzdálenosti s od středu místnosti, ale na opačné straně. Při dupnutí vznikne zvuková vlna, která se bude pro zjednodušení pohybovat pouze dopředu a dozadu (vlna změní směr při nárazu do přední či zadní stěny místnosti). V jakých intervalech zaznamená mikrofon zvuk vytvořený jedním dupnutím? Popište prvních dvacet ozvěn a pokuste se vysvětlit, proč pravidelnost, která se v těchto intervalech nachází, způsobuje ozvěnu.

Dále víme, že nejkratší časový interval, za který hudebníci dokáží zopakovat dupnutí (např. pozastavením nahrávání), je $\tau = 10\,\mathrm{ms}$. Zjistěte, v jakých intervalech (v násobcích τ) od začátku nahrávání mají dupat, aby výsledný zvuk nezněl jako ozvěna jednoho dupnutí. Jak tyto násobky nazýváme?

Úloha VI.3 ... Záludná lodička ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

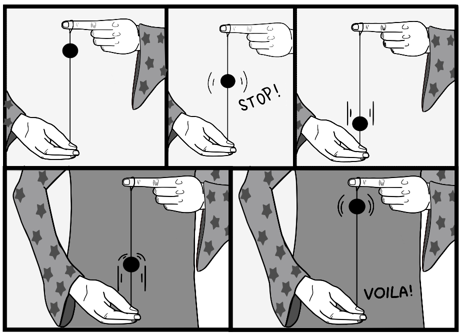
Mějme nádobu tvaru krychle o hraně délky 30 cm, která je z jedné desetiny naplněna vodou. Jestliže do ní vložíme lodičku tvarem přibližně odpovídající kvádru o rozměrech $25 \times 7{,}0 \times 7{,}0\,\mathrm{cm}$ a s poloviční hustotou ve srovnání s vodou, bude lodička na hladině plovat? Jaký objem vody by bylo třeba minimálně v nádobě mít, aby lodička plovala?

Úloha VI.4 ... Těžká pračka ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Uvnitř pračky se otáčí buben s frekvencí $f = 480\,\mathrm{rpm}$ (otáček za minutu), jehož osa je vodorovně se zemí. V bubnu se nachází mokré prádlo o hmotnosti $m = 3\,\mathrm{kg}$. To můžeme považovat za tuhé těleso s těžištěm vzdáleným $r = 10\,\mathrm{cm}$ od středu otáčení bubnu. Pokuste se odhadnout, jakou hmotnost M by pračka musela mít, aby nezačala nadskakovat.

Úloha VI.5 ... Levitující koule ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Na jedné pouti předváděl kouzelník magický trik: obecenstvu ukázal kouli, která byla z protilehlých stran přivázaná za provázek. Následně ale kouzlem dokázal kouli buď spustit dolů, nebo poslat nahoru. Přátelé Výfuku, kteří toto kouzlo viděli, se však nenechali oklamat a ihned prohlédli, že se o žádné kouzlo nejedná: v kuličce jsou totiž místo jednorožčích žíní dvě spojené kladky. Podívejme se na to, jak by soustava kladek mohla fungovat:



- Mějme kladku o poloměru $r_1 = 10\,\mathrm{cm}$, na které je ve středu připevněná menší kladka o poloměru $r_2 = 2{,}0\,\mathrm{cm}$. Na větší kladce je připojen jeden kus provázku, který je kolem ní obmotaný. Stejně je to i na menší kladce, jen je provázek obmotán opačným směrem. Když zatáhneme za oba provázky, kterým směrem se soustava kladek začne otáčet? Připojte svůj nákres, aby vše bylo jasné. Jistě se bude hodit znalost momentů síly.

- Jak jste z předchozí podúlohy jistě pochopili, při zatažení za oba konce nitě se celková délka nenamotané nitě prodlouží a kulička (při vhodné orientaci) stoupne. Kouzelník může šikovnou manipulací ruky vytvořit dojem, že nit se vůbec neprodlouží. Potřebuje k tomu však, aby se kulička chovala předvídatelně, tedy aby při prodloužení nenamotaných nití o Δl kulička stoupla o tu samou délku Δl. Jaký musí být poměr r_1/r_2, aby toto bylo možné?

Úloha VI.E ... Domácí kutilství ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Zapomenout si cestou na nákup brýle je nepříjemné. Jako správní fyzikové si ovšem umíme poradit, a to rychlou výrobou spolehlivé lupy z materiálů, které máme jistě běžně po kapsách.

Vyrobte si doma spojnou čočku. Spoustu návodů můžete najít i na internetu,[1] kreativitě se však meze nekladou. Můžete použít vše od hydrogelových kuliček, přes dna sklenic až po kapky vody. Postup výroby pečlivě zdokumentujte a změřte ohniskovou vzdálenost vaší čočky pomocí světla z velmi vzdáleného zdroje, jehož paprsky lze považovat za rovnoběžné. Takový zdroj je např. Slunce. Pro něj lze formulovat *zobrazovací rovnici pro tenkou čočku*, podle které je ohnisková vzdálenost rovna vzdálenosti čočky a místa, kde se paprsky zdroje soustředí do jednoho bodu.

Nezapomeňte uvést metodu měření a její přesnost.

Úloha VI.V ... Hlavně nepadej ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Pavel doma našel šest identických dřevěných kvádříků o rozměrech $6\times3\times8$ cm a hmotnosti 100 g. Zajímalo by ho, jaké mají kvádry stabilní a vratké polohy. Která poloha jednoho kvádru je nejstabilnější a jaká je její stabilita? Předpokládejte, že kvádr je homogenní.

Následně Pavel zkoušel stavět most z kostek na hraně stolu. Nejdříve položil kvádr a vysunul ho do co nejzazší stabilní polohy. Poté přidal kvádr druhý a tak dále. Na jakou stranu kvádry pokládal, pokud chtěl mít most co nejdelší? Jaká je maximální délka mostu a bude jeho délka větší než délka jednoho z kvádříků?

[1] `https://www.youtube.com/watch?v=Za_h1resks0`

Výfučtení: Stabilita

Úvod

Ať už staví děti hrad z kostek, horolezci se jistí na skalách, či inženýři rýsují nákresy nových staveb, jde jim mnohdy o to samé: aby byl výsledek jejich práce co nejstabilnější. Ve všedním životě procházíme různými budovami, mosty či vyhlídkami a kdykoli na ně vstoupíme, tak máme důvěru, že se pod námi nezbortí. Předpokládáme tedy, že budou stabilní. V čem tato stabilita spočívá? A jak stability můžeme cíleně dosáhnout? Těmito otázkami se budeme ve Výfučtení zabývat.

Skládání sil

Když tzv. vyšetřujeme stabilitu, tak vždy zkoumáme nějaké těleso, u kterého chceme, aby bylo stabilní, což především znamená, že se nebude pohybovat. Co lze z nehybnosti tělesa odvodit? Může nás napadnout, že stabilní těleso se nemůže točit. Tímto tématem se podrobně zabývalo již Výfučtení IX.V Páky a kladky,[2] proto mu zde nebudeme věnovat pozornost. Pokud tedy uvažujeme, že se těleso netočí, stačí vzít na pomoc první Newtonův zákon (zákon setrvačnosti). Ten říká, že pokud na těleso nepůsobí žádná síla nebo je jejich součet nulový, tak těleso zůstává v klidu (to je náš případ), nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Obráceně tedy platí, že pokud těleso stojí, působí na něj síly s nulovou výslednou sílou.

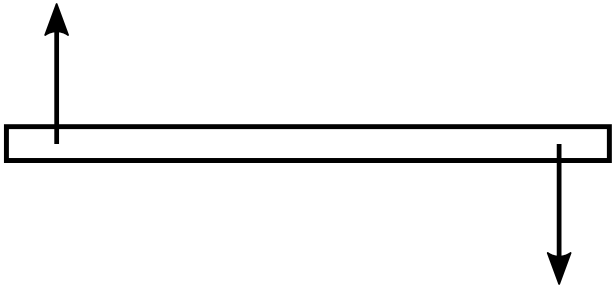
Uveďme si tedy příklad z běžného dne. Pokud stojí hrníček na stole, působí na něj tíhová síla. Hrníček se však nehýbe, to znamená, že je zde ještě jiná síla, která nebyla brána v potaz. A doopravdy, hrníček tlačí na stůl, a stůl tedy tvoří reakci opačného směru (dle zákona akce a reakce), která má stejnou velikost jako síla tíhová. Stejná síla tedy působí dolů i nahoru, ve vektorovém součtu proto dávají nulový výsledek.

Co však dělat, když je sil více a jsou různě orientované? Začněme tím, jestli z nich můžeme dostat jen jedinou sílu, která by nám pomohla zjistit, jestli se těleso hýbe. Pokud nevyloučíme točení, mohla by nastat situace, kdy síly budou těleso jen roztáčet, a ne s ním pohybovat. Součet všech sil by však byl nulový. Pokud ale vyloučíme točení, tak je možné všechny síly sečíst, a tak se dobrat výsledného chování tělesa.

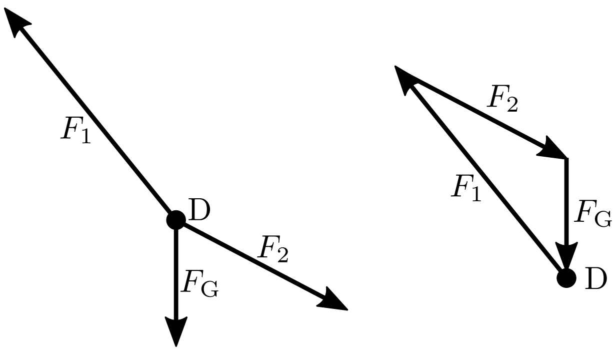
Jak síly sečíst? První variantou je spočítat součet sil pomocí goniometrických funkcí. Druhou možností je vyřešit součet graficky. Grafické řešení umožňuje jednoduše sčítat i velké množství sil. Toto skládání sil je možné díky *principu superpozice*. Začneme tím, že si znázorníme všechny síly jako *orientované úsečky* (úsečky, které někde začínají a někde končí a mají směr, tedy šipky). Síly se poté skládají tak, že se přenesou na konec předchozí síly. Tímto způsobem se všechny seřadí a výsledná síla bude orientovanou úsečkou od počátku první síly po konec poslední síly.

Uveďme si tedy příklad. Pokud pouštíme draka, je nakloněn pod nějakým stálým úhlem. Pro jednoduchost uvažujme, že vítr bude působit kolmo na povrch draka silou F_1. Dále na draka bude působit síla tíhová F_G směrem k zemi. Draka na místě držíme pomocí provázku, což je třetí působící síla F_2. Složením těchto sil získáme výslednou sílu, která rozhodne o chování draka.

[2] https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r9/vyfucteni/serial5.pdf



Obr. 1: Dvojice sil působící na tyč



Obr. 2: Skládání sil při pouštění draka

Jelikož je začátek i konec sil na stejném místě, bude velikost nulová. Drak tedy v našem případě zůstane na místě. Pokud bychom složili dvě síly a pak výsledek složili s poslední silou, došli bychom ke stejnému výsledku. Stejně tak by byl výsledek stejný i pro jiné pořadí sil. Zkuste si to.

Těžiště

Ve Výfučtení se budeme zabývat tuhými tělesy, tedy tělesy zachovávajícími si svůj tvar i při působení sebevětších sil. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že hustota je v celém objemu tělesa stejná. Těžiště označuje místo v tělese, kde je působiště tíhové síly Země, jednoduše řečeno bod, který kdybychom podložili, bylo by těleso v rovnováze. Musíme si ale pamatovat, že ne všechny geometrické útvary mají těžiště uvnitř, stačí se podívat na torus, lidsky řečeno donut, či pneumatiku auta.

Pozice těžiště poté vyplývá ze tvaru a hmotnosti objektu a jeho přesnou pozici můžeme určit několika způsoby. Jedná-li se o symetrický objekt, nachází se těžiště v rovině nebo v ose symetrie. U krychle můžeme vzít třeba dvě různé tělesové úhlopříčky, které určují dvě roviny symetrie a jejich průsečík určuje těžiště. U kužele umíme také určit osu symetrie, těžiště se tedy nachází na ní. U nesourodých těles můžeme těžiště určit experimentálně. Zkoumané těleso zavěsíme za libovolný bod a označíme svislou čáru vedoucí ze závěsu, tzv. *těžnici*, vyměníme závěsný bod a průsečíky těžnic určí těžiště tělesa.

Těžiště můžeme zjistit i u soustavy několika těles, známe-li polohy jednotlivých těžišť a hmotnosti objektů. Výsledné těžiště můžeme určit početně podle vzorce

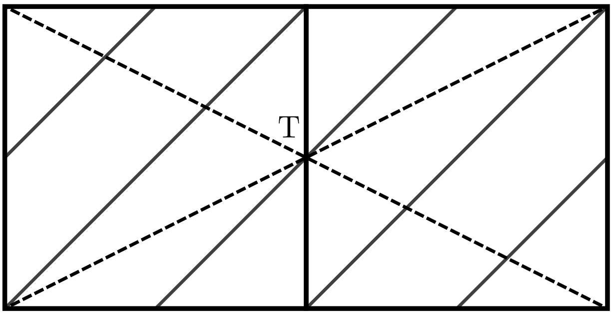
$$T = \frac{m_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot T_2 + \cdots + m_n \cdot T_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}\,.$$

V tomto vztahu je T buď souřadnice x, y, nebo z těžiště. Dále m_n jsou hmotnosti objektů, ze kterých je naše těleso složeno, a T_n jsou opět souřadnice těchto těles. Rovnice výše jsou tedy vlastně tři rovnice pro souřadnice x, y a z těžiště.

Možná jste si také všimli, že vzorec na výpočet těžiště odpovídá váženému průměru, který se počítá například při průměrování známek. Zde akorát namísto známek počítáme průměr poloh a váha, kterou se násobí známka a představuje její důležitost, je v tomto případě hmotnost.

Společné těžiště dvou těles

Pro získání společného těžiště dvou těles jistě musí existovat nějaká pravidla. Pokusíme se je nyní společně odvodit. Představme si, že máme dvě krychle o stejné hustotě a položíme je těsně vedle sebe. Tím nám vznikl kvádr. Jelikož dokážeme určit těžiště tohoto kvádru i obou krychlí, můžeme zjistit, že těžiště leží na spojnici těchto těžišť, v tomto případě přímo uprostřed.



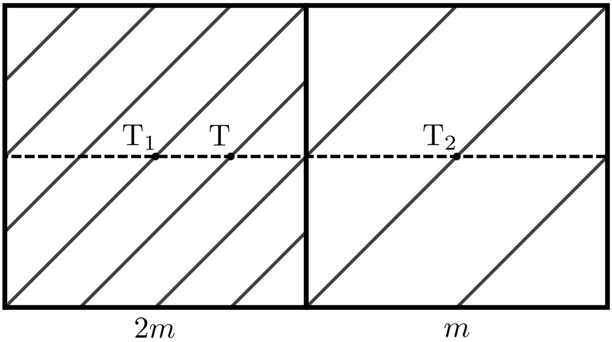
Obr. 3: Společné těžiště dvou krychlí

Pokud bychom si však představili dva kvádry o různých hustotách, tak by se společné těžiště rozhodně nenacházelo uprostřed, ale bylo by blíže těžšímu kvádru. Vzdálenosti mezi výsledným těžištěm a jednotlivými těžišti lze poté popsat jako

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}\,.$$

Výsledné těžiště tedy bude na spojnici mezi jednotlivými těžišti s poměrem vzdáleností odpovídajícímu převrácenému poměru hmotností.

Pomocí tohoto postupu lze spočítat i těžiště tělesa, které není homogenní, protože si ho můžeme rozdělit na více těles, která již homogenní budou. Pokud se mění hustota spojitě (nikoliv skokově), mohli bychom těleso chtít rozdělit na nekonečně mnoho malých dílků. Museli bychom však použít pokročilejší matematické metody (tzv. integrování), které jsou nad rámec tohoto textu.



Obr. 4: Společné těžiště dvou krychlí o různých hmotnostech

Polohy tělesa

Ze znalosti těžiště můžeme určit, v jak stabilní poloze se těleso nachází. Obecně můžeme určit tři různé polohy – stálou, vratkou a volnou. Ve stálé (stabilní) poloze se nachází bod upevnění nad těžištěm, příkladem této polohy je kyvadlo nebo kulička v misce. Při vychýlení je působením vnější síly vracena do původní stabilní polohy. Potenciální energie je v této pozici nejmenší.

Oproti tomu ve vratké (labilní) pozici se objekt po vychýlení nevrací do původní polohy, ale do nové, nyní už stabilní, polohy. V průběhu přemístění těleso ztrácí potenciální energii. V labilní poloze se nachází těžiště nad bodem upevnění, můžeme si tedy představit kuličku na kopci nebo kyvadlo s pevným závěsem ve vrchní poloze.

Do třetice zbývá pozice volná (indiferentní). V této pozici je těleso upevněno přímo v těžišti. Při vychýlení zůstává potenciální energie konstantní a těleso zůstává v nové, ale pořád indiferentní pozici. Ve volné pozici se nachází například kniha na vodorovném stole.

V reálném životě je rozdělení poloh do jednotlivých skupin složitější. Většinou se díváme na lokální polohy těles. Problematiku si můžeme přiblížit na následujícím příkladu – máme v kuličku v údolí, nachází se tedy v lokální stabilní poloze. Při malém vychýlení se vrátí do původní polohy, ale pokud bychom do kuličky strčili více, přehoupla by se přes hřeben do druhého údolí a skončila by tedy v nové, zase lokální stabilní poloze.

Stabilita

Stabilita označuje práci, kterou musíme vykonat, chceme-li přemístit těleso ze stálé polohy do nejbližší polohy vratké. Vezmeme-li krychli o straně a, můžeme vypočítat její potenciální energii E_{p_1} ve stabilní pozici, kdy leží na straně a těžiště se nachází ve výšce $h = a/2$ nad zemí. Následně vychýlíme krychli do nejbližší vratké polohy – na hranu krychle. Nová poloha těžiště je $h = a\sqrt{2}/2$ a současně se změní i potenciální energie E_{p_2}. Stabilita krychle tedy bude

$$W = E_{\mathrm{p}_2} - E_{\mathrm{p}_1} = mgh' - mgh = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot mga\,.$$

Obecně jsou nejstabilnější pozice ty, které mají těžiště soustavy nejníže. Platí ještě jedno důležité pravidlo stability, a to že těžnice spuštěná svisle dolů musí procházet podstavou. Pokud se rozhodneme postavit most z kostek, musí platit, že jejich společné těžiště musí pořád ležet nad podstavou nebo alespoň na její hraně. Zde se přímo nabízí zmínit šikmou věž v Pise, která je i přes svůj náklon stabilní, jelikož je její těžiště ještě stále nad podstavou.

Nejstabilnější sklenice

Všechny naše nabyté zkušenosti budeme moci zúročit na následujícím příkladu. Máme válcovou sklenici o výšce l, poloměru podstavy r a hmotnosti m. Nás by zajímalo, kolik vody bychom do ní museli nalít, aby byla sklenice co nejstabilnější, tzn. aby měla těžiště co nejníže.

Jako první určíme těžiště prázdné sklenice. Z rotační symetrie sklenice můžeme určit, že těžiště se nachází někde ve svislé přímce procházející středem. Počátek souřadnic si zvolme v levém spodním „rohu“ sklenice. Zvolíme si osy x a z jdoucí v rovině podstavy a osu y jdoucí kolmo na podstavu. Pro x-ovou a z-ovou polohu těžiště tak v naší soustavě platí:

$$T_x = r\,,$$
$$T_z = 0.$$

Nyní se soustřeďme na polohu y těžiště. K jejímu přesnému určení si stačí uvědomit, že jelikož má sklenice všude stejnou plošnou hustotu a tloušťku, budeme moci hmotnost nahradit obsahem jednotlivých částí. Musíme tedy najít společné těžiště obou složek. Sklenici si tedy rozdělíme na podstavu s pláštěm a určíme jejich obsahy.

Ze symetrie vyplývá, že těžiště podstavy bude v jejím středu, a jeho y bude poloha v počátku, tudíž $y_{\mathrm{pod}} = 0$. Tvar podstavy je samozřejmě kruhový o obsahu $S_{\mathrm{pod}} = \pi r^2$. Těžiště pláště bude také ve středu rotační symetrie a v polovině výšky pláště $y_{\mathrm{pl}} = l/2$, pro obsah pláště platí $S_{\mathrm{pl}} = 2\pi rl$. Dostaneme tedy následující rovnici

$$T_y = \frac{m_{\mathrm{pod}} \cdot y_{\mathrm{pod}} + m_{\mathrm{pl}} \cdot y_{\mathrm{pl}}}{m_{\mathrm{pod}} + m_{\mathrm{pl}}} = \frac{S_{\mathrm{pod}} \cdot y_{\mathrm{pod}} + S_{\mathrm{pl}} \cdot y_{\mathrm{pl}}}{S_{\mathrm{pod}} + S_{\mathrm{pl}}} = \frac{\pi r^2 \cdot 0 + 2\pi rl\frac{l}{2}}{\pi r^2 + 2\pi rl} = \frac{l^2}{r + 2l}\,.$$

Jakmile začneme nalévat vodu, těžiště se bude snižovat. Při určité výšce vody se těžiště ocitne v hladině vody a při dalším přilití vody se musí těžiště posunout nahoru, jelikož se část vody ocitá nad ním. Z toho můžeme usoudit, že se těžiště nachází nejníže právě tehdy, když se nachází v hladině vody.

Vyjádřeme polohu y tohoto nového těžiště. Vypočteme ji jako složení dvou těles: sklenice z předchozího výpočtu a vody, která má těžiště v polovině výšky.

$$T'_y = h = \frac{T_y m + \frac{h}{2} m_{\mathrm{v}}}{m + m_{\mathrm{v}}}\,.$$

Hmotnost vody m_{v} určíme z výšky hladiny h, obsahu podstavy $S = \pi \cdot r^2$ a hustoty ρ. Rovnice vede na výsledek

$$h = \frac{T_y m + \frac{h}{2} hS\rho}{m + hS\rho}$$
$$0 = h^2 \frac{S\rho}{2} + hm - T_y m$$
$$h = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 2S\rho m T_y}}{S\rho}\,.$$

Z fyzikálního hlediska dává smysl pouze kladný kořen, pro lepší představu můžeme dosadit orientační hodnoty. Pro sklenici o výšce $l = 10\,\mathrm{cm}$, poloměru $r = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ a hmotnosti $m = 150\,\mathrm{g}$ vychází původní výška těžiště $T_y = \frac{10^2}{4+2\cdot 10}\,\mathrm{cm} \doteq 4{,}2\,\mathrm{cm}$. Po přilití vody se těžiště sníží na hodnotu

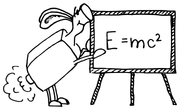
$$T'_y = \frac{\sqrt{m^2 + 2\pi r^2 m T_y} - m}{\pi r^2 \rho}$$

$$T'_y = \frac{\sqrt{0{,}15^2 + 2\pi \cdot 0{,}04^2 \cdot 1\ 000 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}042} - 0{,}15}{\pi \cdot 0{,}04^2 \cdot 1\ 000} = 2{,}8\,\mathrm{cm}\,.$$

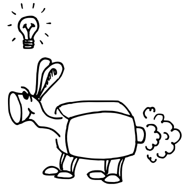
Tento výsledek platí, pouze pokud je sklenice v klidu. Kapaliny nejsou tuhé, při působení sil mění svůj tvar a přizpůsobují se tvaru nádoby. Při naklonění se změní poloha těžiště, jelikož voda uvnitř sklenice změní tvar svého objemu.

Shrnutí

V tomto Výfučtení jsme si ukázali hledání těžiště jak u těles homogenních, tak u těles složených, a dokonce i u těles reálných (experimentálně). Dále jsme zjistili, jak skládat síly graficky pomocí přenášení úseček. Důležité jsou i tři různé polohy těles. Ve volné poloze je tělesu jedno, jak ho otáčíme, z vratké polohy se snaží přejít do polohy stálé. Na závěr jsme si ukázali, jaká práce je potřeba na změnu poloh, a vyzkoušeli jsme si i praktický příklad se skleničkou.



Řešení IV. série



Úloha IV.1 ... Věk Roberta

5 bodů; průměr 4,44; řešilo 9 studentů

Robert bude mít za chvilku narozeniny, a tak si ještě chce užít svůj současný věk. Začal tedy vymýšlet různé příklady a spojitosti. Jelikož ale organizuje Výfuk, napadla ho slovní úloha s Výfučkem:

Před čtyřmi lety byl Výfuček přesně třikrát mladší, než je Robert teď, ale Robert byl před dvěma lety jen dvakrát starší než Výfuček v té stejné době. Kolik let je letos Robertovi?

Úlohu neřešte tak, že znáte momentální věk Výfučka, ale pomocí rovnic.

Ze zadání můžeme dát dohromady dvě rovnice. Neznámá v představuje věk Výfučka a neznámá r věk Roberta:

$$(v-4)\cdot 3 = r\,,$$
$$(v-2)\cdot 2 = r-2\,.$$

Vznikla nám soustava dvou rovnic o dvou neznámých, kterou vyřešíme tak, že do druhé rovnice dosadíme za neznámou r z první rovnice. Následně provádíme ekvivalentní úpravy, tedy na každé straně rovnice uděláme stejnou matematickou operaci, až se dopracujeme k hodnotě v:

$$\begin{aligned}(v-2)\cdot 2 &= (v-4)\cdot 3-2\,,\\ 2v-4 &= 3v-12-2\,,\\ 2v &= 3v-10\,,\\ v &= 10\,.\end{aligned}$$

Pokud známe věk Výfučka, můžeme vypočítat i věk Roberta tím, že dosadíme do druhé, jednodušší rovnice:

$$\begin{aligned}(10-4)\cdot 3 &= r\,,\\ 18 &= r\,.\end{aligned}$$

Robertovi je tedy právě 18 let.

Anežka Čechová
anezka@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.2 ... Rád vařím

5 bodů; průměr 4,78; řešilo 40 studentů

Petr rád vaří a ví, že to umí. Proto se rozhodl udělat si guláš. Rozkrojil cibuli na dvě stejné půlky a jednu polovinu začal krájet rychlostí $\xi_1 = 15\,\mathrm{kostek{\cdot}s^{-1}}$ *(malé řecké xí).*

V tom však přišla do místnosti Monika přesně ve chvíli, kdy Petr dokrájel první polovinu cibule. Petr ví, že se holkám líbí, když vaří, takže se zarděl a zpomalil svou rychlost krájení cibule na $\xi_2 = 10\,\mathrm{kostek{\cdot}s^{-1}}$. *Jaká byla jeho průměrná rychlost krájení cibule* $\overline{\xi}$*?*
Nápověda: Není to $(\xi_1 + \xi_2)/2$.

Při prvním pohledu na tuto úlohu nás jistě napadlo obě rychlosti jednoduše zprůměrovat, tedy sečíst a vydělit dvěma, a dostat tak průměrnou rychlost. Toto možná intuitivní řešení ale není správné, Petr totiž nekrájel danými rychlostmi po stejnou dobu, ale pouze stejnou část cibule. Můžeme si to představit i tak, že jedeme na silnici a první polovinu cesty projedeme rychlostí $v_1 = 100\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ za čas $t_1 = 1\,\mathrm{h}$ a druhou polovinu rychlostí $v_2 = 1\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ za $t_1 = 100\,\mathrm{h}$. U takto velkého rozdílu by nám už připadalo možná zvláštní rychlosti prostě zprůměrovat, protože druhou rychlostí jel řidič výrazně déle. Podobně je to i u našeho krájení cibule.

I když nejsme možná zvyklí na jednotku $\mathrm{kostek{\cdot}s^{-1}}$, můžeme s ní pracovat úplně stejně jako například s jednotkou $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, která je nám již pravděpodobně známější. Průměrnou rychlost krájení cibule spočítáme jako podíl celkem nakrájené cibule a celkového času, za který jsme ji nakrájeli (tedy jako ekvivalent rychlosti, kterou spočítáme jako podíl celkové dráhy a celkového času). Nyní nám tak zbývá zjistit, jakou velikost tyto dvě veličiny mají.

Celkový objem nakrájené cibule známe. Petr krájel dvě poloviny různými rychlostmi, dohromady tedy nakrájel přesně jednu cibuli. Samozřejmě předpokládáme, že obě poloviny cibule jsou stejně velké a Petr krájí pořád stejně velké kostky.

Určení celkového času už je složitější. Nemáme ho explicitně uveden v zadání úlohy, ale můžeme si ho jednoduše vyjádřit jako podíl nakrájené cibule a rychlosti jejího krájení. Stačí předpokládat, že jedna polovina cibule obsahuje n kostek. Čas krájení první poloviny cibule tak je

$$t_1 = \frac{n\,\mathrm{kostek}}{\xi_1} = \frac{n\,\mathrm{kostek}}{15\,\mathrm{kostek{\cdot}s^{-1}}} = \frac{n}{15}\,\mathrm{s}\,,$$

čas krájení druhé poloviny je podobně $t_2 = n/10\,\mathrm{s}$. Celkový čas krájení cibule je součet obou těchto časů. Obdrželi jsme výsledek, který obsahuje neznámé číslo n. To nám nicméně nevadí, neboť ve výsledku se vykrátí. O tom se přesvědčíme vzápětí, nicméně dává taktéž smysl, že výsledek by na počtu kostek v cibuli neměl záviset, stejně jako by rychlost auta neměla záviset na tom, jestli závislost měříme v metrech nebo kilometrech.

Když si teď dáme do poměru nakrájenou cibuli a celkový čas, dostaneme

$$\overline{\xi} = \frac{2n\,\mathrm{kostek}}{t_1 + t_2} = \frac{2n}{\frac{n}{15\,\mathrm{s^{-1}}} + \frac{n}{10\,\mathrm{s^{-1}}}} = 12\,\mathrm{kostek{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Průměrná Petrova rychlost krájení cibule je tedy $\overline{\xi} = 12\,\mathrm{kostek{\cdot}s^{-1}}$.

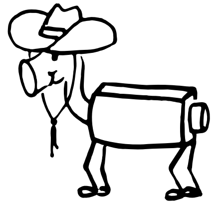
Nyní ještě zkontrolujeme, zda nám v celém výpočtu sedí jednotky. Tomu ve fyzice říkáme, že děláme tzv. rozměrovou analýzu, což znamená, že kromě čísel do vzorce dosadíme i jednotky, se kterými pracujeme stejně jako s čísly. Můžeme je mezi sebou krátit nebo je násobit. Z výpočtu vidíme, že se nám vskutku n vykrátí a zůstane tak opravu jen rychlost v kostkách za sekundu.

Takto postupujeme i u všech ostatních fyzikálních příkladů, zvlášť u těch složitějších je rozměrová analýza jednoduchým a užitečným nástrojem k určení toho, zda máme výsledný vzorec správně. Přesto se však při výpočtech fyzikálních úloh nemůžeme omezit pouze na rozměrovou analýzu, protože ta nám nepomůže určit bezrozměrné konstanty, například jednu polovinu.

Karolína Letochová
kaja@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... Odplata

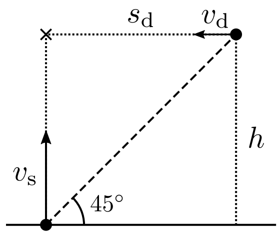
6 bodů; průměr 4,42; řešilo 33 studentů



Výfuček zbožňuje kovbojské historky, hlavně je-li sám hlavním hrdinou. Nejraději vypráví, jak sám zatočil s nezvaným pozorovatelem. V dávných dobách, kdy ještě nikdo soudně neřešil sestřelení dronu kamenem, spatřil kovboj Výfuček pod úhlem 45° *ve vodorovné vzdálenosti* $80{,}0\,\mathrm{m}$ *cizí dron, jak mu rychlostí* $39{,}6\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ *vodorovně letí okoukat měření experimentální úlohy. Jal se tedy bleskově zkonstruovat odstředivý prak, aby dron sestřelil právě ve chvíli, kdy prolétal nad ním. Kolik času na sestavení praku Výfuček měl, aby dron ještě stihl trefit, letí-li střela z praku počáteční rychlostí* $44{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$*? Kdyby prak dokázal vyrobit mnohem rychleji, jak brzy od spatření dronu už může střílet, aby ho sestřelil? Jak by se situace změnila, pokud by mohl Výfuček vystřelit kámen mnohem rychleji? Jaký je pak nejdelší časový úsek, který má k sestavení praku teoreticky k dispozici? A je vůbec Výfučkova historka reálná?*

Označme si dráhu a rychlost dronu jako s_d a v_d, rychlost střely jako v_s a výšku, ve které se dron pohybuje, pomocí h. Dron vidíme pod úhlem 45°, což znamená, že se v našem problému vyskytuje čtverec, neboli platí $s_\mathrm{d} = h$.

Střela vylétává rychlostí $v_\mathrm{s} = 44{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, přičemž při svém výstupu vzhůru zpomaluje. To znamená, že výšku h můžeme vyjádřit jako $v_\mathrm{s} t_\mathrm{s}$. Od ní odečteme dráhu ztracenou zpomalováním.



$$h = v_\mathrm{s} t_\mathrm{s} - \frac{1}{2} g t_\mathrm{s}^2$$
$$0 = -\frac{1}{2} g t_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{s} t_\mathrm{s} - h$$

Z tohoto vztahu potřebujeme vyvodit t_s, abychom věděli, jak dlouho bude střela stoupat, čehož dosáhneme pomocí diskriminantu.

$$D = v_\mathrm{s}^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} g\right) \cdot (-h) = v_\mathrm{s}^2 - 2gh$$
$$t_\mathrm{s} = \frac{-v_\mathrm{s} \pm \sqrt{v_\mathrm{s}^2 - 2gh}}{-g}$$
$$t_\mathrm{s} = \frac{-44{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \pm \sqrt{(44{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 - 2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 80{,}0\,\mathrm{m}}}{-9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}$$
$$t_{\mathrm{s}_1} \doteq 2{,}53\,\mathrm{s}$$
$$t_{\mathrm{s}_2} \doteq 6{,}44\,\mathrm{s}$$

Zde dostáváme dva výsledky, protože střela letí nejprve nahoru a poté i dolů, což znamená, že se ve výšce h objeví dvakrát.

Čas, který má Výfuček na sestrojení praku, nyní získáme odečtením doby letu kamene od doby letu dronu:

$$t_1 = \frac{s_\mathrm{d}}{v_\mathrm{d}} - t_{\mathrm{s}_1} = \frac{80{,}0\,\mathrm{m}}{11{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} - 2{,}53\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 4{,}74\,\mathrm{s}\,,$$
$$t_2 = \frac{s_\mathrm{d}}{v_\mathrm{d}} - t_{\mathrm{s}_2} = \frac{80{,}0\,\mathrm{m}}{11{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} - 6{,}44\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 0{,}836\,\mathrm{s}\,.$$

Výfuček tedy má 4,74 s na to, aby prak postavil, popřípadě 0,83 s za předpokladu, že by dokázal sestavit prak a vystřelit kámen mnohem rychleji.

Kdyby dokázal prakem udělit střele výrazně vyšší počáteční rychlost, mohl by mít na stavbu praku více času, vždy ale maximálně do doby, než bude dron přímo nad ním (pokud chce stále sestřelit dron přímo nad sebou), tedy vždy bude mít méně času než

$$t_\mathrm{max} = \frac{s_\mathrm{d}}{v_\mathrm{d}} = \frac{80{,}0\,\mathrm{m}}{11{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \doteq 7{,}27\,\mathrm{s}\,.$$

V každém případě se ale jedná o smyšlenou historku, protože tyto časy jsou moc krátké na to, aby Výfuček prak dokázal reálně postavit.

Adam Krška
`adam@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.4 ... Archimédův kladkostroj 6 bodů; průměr 5,38; řešilo 40 studentů

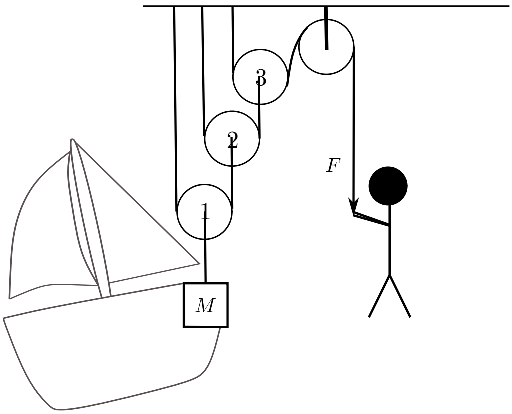
Těžko dohledat, kdy lidé objevili fyzikální princip kladky. Spojení kladek do kladkostroje však poprvé podle pověsti vymyslel již Archimédes, když s jeho pomocí dokázali obyvatelé Syrakus zavléct plně naloženou nákladní loď do přístavu.

Jeden příklad soustavy kladek se nazývá přímo Archimédův kladkostroj a vypadá jako n volných kladek zapojených vždy jedna na druhou spolu s jednou pevnou kladkou. Kladkostroj pro $n = 3$ můžete vidět na obrázku.

Aby Archimédes přesvědčil obyvatele Syrakus o užitečnosti svého vynálezu, využil kladkostroj, aby sám nadzvedl celou loď. Kolik volných kladek musel Archimédes takto zapojit za sebe, pokud dokáže tahat silou nejvýše $F = 500\,\mathrm{N}$ a potřebuje nadzvednout loď o hmotnosti $M = 200\,\mathrm{t}$?

Podívejme se na první volnou kladku, ke které je přímo připevněná loď. Sílu, jíž na tuto kladku loď působí, označme jako $F_0 = Mg$. Kladka sílu F_0 rozkládá na dvě lana. Pokud bychom tedy tahali jen za jedno, budeme muset kvůli zvednutí lodě do určité výšky působit silou poloviční velikosti, zato však po dvojnásobné dráze.

Stejnou úvahu můžeme provádět opakovaně, takže každá další volná kladka potřebnou sílu vydělí dvěma. Zajímá nás, kolikrát budeme muset sílu F_0 rozpůlit, dokud nebude menší než největší síla, kterou je schopný vyvinout Archimédes. To můžeme snadno zjistit dosazením do



Obr. 5: Archimédův kladkostroj

jednoduché logaritmické rovnice, případně si pomoci postupným násobením síly F (a úlohu řešit iterativně). Rovnice vypadá následovně:

$$\frac{F_0}{2^n} = F\,,$$

$$\frac{F_0}{F} = 2^n\,,$$

$$\log_2 \frac{F_0}{F} = n\,,$$

$$n = \log_2 \frac{200\,000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{500\,\mathrm{N}}\,,$$

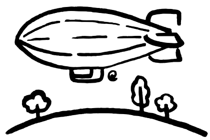
$$n \doteq 11{,}94\,.$$

Archimédes by v ideálním případě potřeboval alespoň 12 volných kladek.

Viktor Materna
materna@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.5 ... Vzducholoď

7 bodů; průměr 5,90; řešilo 29 studentů



Vzducholodě mají velmi náročný život. Vztlaková síla zodpovědná za jejich let se obyčejně lehce spočítá, nicméně v případě vzducholodě se vnější a dost často i vnitřní podmínky během letu mění. Aby vzducholoď nespadla, musí se tedy neustále regulovat příliv horkého vzduchu.

Představte si třeba, že vzducholoď vylétne ráno, kdy je teplota vzduchu $T_1 = 5{,}00\,{}^\circ\mathrm{C}$ a jeho hustota je $\rho_0 = 1{,}268\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Uvažujme např. vzducholoď Hindenburg o objemu plynu $V = 200\,000\,\mathrm{m^3}$, která je naplněna vodíkem s hustotou $\rho_1 = 0{,}087\,2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Hmotnost konstrukce vzducholodi je $m = 50\,\mathrm{t}$.

1. *Jakou užitečnou hmotnost unese?*

Uplyne nějaký čas a již je odpoledne, okolní vzduch se oteplí na $T_2 = 10{,}0\,°\mathrm{C}$, zatímco tlak zůstane zhruba stejný.

2. *Oteplením se ale změní hustota vzduchu, vypočítejte jak moc, je-li počáteční hustota vzduchu rovna ρ_0.*

Pro výpočet můžeme považovat vzduch za tzv. ideální plyn, pro který platí tzv. Gay-Lussacův zákon. Tento zákon říká, že pro objem ideálního plynu V a jeho teplotu T platí, že jejich poměr je za stálého tlaku konstantní, tedy

$$\frac{V}{T} = \text{konst.}$$

Pozor, aby tento vzorec platil, musíte použít teplotu v jednotkách Kelvin (tzv. termodynamická teplota). Po této atmosferické změně však vzducholoď musí něco udělat, nebo spadne.

3. *Jakou hustotu musí mít vodík, aby se rozepjal dost na to, aby ani při zvýšené teplotě okolního vzduchu vzducholoď neklesala? Nezapomeňte, že objem vaku s vodíkem se mění, ale hmotnost vzducholodi zůstává konstantní.*

Hustotu vodíku mohou technici ve vzducholodi regulovat pomocí teploty – mohou vodík zahřívat nebo ochlazovat pomocí kotlů. Tlak vodíku ve vzducholodi musí přitom zůstávat stejný jako vnější atmosferický tlak, který uvažujeme, že se nemění.

4. *Na jakou teplotu musí zatopit ve vzducholodi, aby se vodík dostal na požadovanou hustotu? Počítejte, že vodík se chová jako ideální plyn.*

Nebezpečí vzducholodí poháněných vodíkem spočívá ve velké vznětlivosti tohoto prvku. Ani používáním nevýbušného prvku se však všem nebezpečím nevyhneme. Může se totiž stát, že např. vlivem silného slunečního svitu se plyn ve vzducholodi ohřeje a vzducholoď začne stoupat. Kvůli slunci ztratí technici možnost chladit vodík a začne jim hrozit velké nebezpečí: vzducholoď může prasknout.

Samozřejmě, tomuto jevu se můžou technici bránit upuštěním vodíku. Je však třeba reagovat rychle.

1. Vzducholoď nadnáší vztlaková síla a k zemi ji táhne síla tíhová. Užitečnou hmotností m_u bude vzducholoď naložena tehdy, když nastane rovnováha mezi těmito silami (při vyšších hmotnostech už by tíha překonala vztlakovou sílu a vzducholoď by nemohla vzlétnout). Při výpočtu tíhové síly nesmíme zapomenout na hmotnost helia.

$$\begin{aligned} V\rho_0 g &= (V\rho_1 + m + m_\mathrm{u})g \\ m_\mathrm{u} &= V(\rho_0 - \rho_1) - m = 186\,\mathrm{t} \end{aligned}$$

2. Tato část úlohy lze asi nejlépe vyřešit tak, že se zaměříme na nějakou oblast o objemu ΔV vyplněnou vzduchem o hmotnosti Δm s hustotou ρ_0 tak, že samozřejmě platí:

$$\rho_0 = \frac{\Delta m}{\Delta V}\,.$$

Když nyní zvýšíme teplotu na T_2, objem této části vzduchu se zvětší podle rovnice v zadání, která platí pro děje v ideálním plynu za konstantního tlaku. Nesmíme zapomenout na to, že je do vzorce třeba dosazovat teplotu vyjádřenou v Kelvinově stupnici, která funguje stejně jako Celsiova, jen je vůči ní posunuta tak, aby 0 K odpovídalo nejnižší možné teplotě, tzv. *absolutní nule*, která odpovídá přibližně −273,15 °C. Převodní vztah mezi těmito stupnicemi tedy je:

$$\frac{T}{[\mathrm{K}]} = \frac{T}{[^\circ\mathrm{C}]} + 273{,}15\,.$$

Vraťme se nyní zpět k výpočtu hustoty. Již jsme zmínili, že pro změnu objemu vzduchu platí:

$$\frac{\Delta V}{T_1} = \frac{\Delta V'}{T_2}\,,$$

přičemž jeho hmotnost po oteplení samozřejmě zůstane stejná. Nová hustota vzduchu potom bude:

$$\rho_0' = \frac{\Delta m}{\Delta V'} = \frac{\Delta m}{\Delta V}\frac{T_1}{T_2}\,,$$
$$\rho_0' = \frac{T_1}{T_2}\rho_0 = 1{,}25\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

3. Vzducholoď nesmí klesat, proto musí být stále splněna podmínka z části 1, tedy:

$$V'\rho_0' g = (V'\rho_1' + m + m_\mathrm{u})g\,,$$

kde V' a ρ_1' jsou pozměněný objem a hustota vodíku ve vzducholodi. Pro tyto dvě veličiny platí vztah:

$$M = V'\rho_1' = V\rho_1\,,$$
$$V' = V\frac{\rho_1}{\rho_1'}\,,$$

neboť hmotnost vodíku ve vzducholodi se nemění. S využitím tohoto vztahu a výsledků z předchozích částí úlohy snadno zjistíme, že pro požadovanou hustotu vodíku platí:

$$V\frac{\rho_1}{\rho_1'}\cdot\frac{T_2}{T_1}\rho_0 g = (V\rho_1 + m + (V\rho_0 - V\rho_1 - m))\,g$$

a když vykrátíme g z obou stran rovnice a poté odečteme shodné členy, zůstane nám

$$V\frac{\rho_1}{\rho_1'}\cdot\frac{T_2}{T_1}\rho_0 = V\rho_0\,,$$

takže můžeme podělit součinem $V\rho_0$ a dostat na pravé straně jedničku. Převedením ostatních proměnných mimo hledané ρ_1' na tuto stranu dostáváme výsledek:

$$\rho_1' = \frac{T_1}{T_2}\rho_1 = 0{,}085\,7\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

4. Mohli bychom opět dosadit do Gay-Lussacova zákona a v podstatě zopakovat postup z části 2, nebo si rovnou všimneme, že výsledek z části 3 má stejný tvar jako výsledek z 2., který popisuje změnu hustoty při změně teploty z T_1 na T_2 za konstantního tlaku. Jinými slovy: v závěru minulé části jsme obdrželi obdobnou rovnici pro vodík jako tu, která platí pro okolní vzduch, a v obou hraje roli pouze závislost na teplotách okolního vzduchu. To může znamenat, že vodík má před i po změně hustoty stejnou teplotu, jako okolí. To si můžeme ostatně ověřit zavedením neznámé teploty vodíku T_2', přičemž T_1' jako teplota vodíku *před* ohřevem vzduchu bude právě rovna T_1, s čímž počítáme již od začátku.
$$\rho_1' = \frac{T_1}{T_2}\rho_1 = \frac{T_1'}{T_2'}\rho_1 \quad\Rightarrow\quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_1'}{T_2'} = \frac{T_1}{T_2'} \quad\Rightarrow\quad T_2' = T_2$$
Vodík je tedy třeba ohřát na stejnou teplotu, jako je teplota okolního vzduchu, tedy na 10 °C. Díky tomu navíc víme, že pokud se teploty v důsledku vnějších vlivů nezmění, vzducholoď zůstane ve své letové hladině, protože vzduch nebude plavidlu předávat teplo ani naopak.

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.E ... Voda je nenahraditelná

7 bodů; průměr 4,96; řešilo 27 studentů

Změřte hustotu vody takzvanou substituční metodou. To znamená: vytvořte pevné těleso, které má stejnou hustotu (podíl celkové hmotnosti ku celkovému objemu) jako voda (to poznáte tak, že pokud ho nahradíme vodou, nic se nestane, jinak řečeno: nebude stoupat ani klesat, i když bude zcela ponořeno). Změřte přímo jeho hustotu vážením a měřením a zdokumentujte váš postup výroby.

Svou technologii prověřte vyrobením druhého tělesa pro změření hustoty jiné kapaliny dle vašeho výběru (oleje, medu, octa či čehokoli jiného, zdraví neškodného).

Výsledky poté ověřte u obou kapalin přímým měřením objemu a hmotnosti. Tabulkové hodnoty zde nemají využití, zaměřte se spíše na míru nejistoty vašeho výsledku u obou metod.

Úvod

Substituční metoda spočívá v *nahrazení* (odtud název „substituční“) něčeho, co nezvládneme změřit, jinou věcí, kterou schopni měřit jsme, a v tomto případě dokonce i měnit její vlastnosti. U našeho měření bude nejlepším řešením najít těleso s pevně daným objemem, do kterého budeme přidávat závaží do té doby, než bude mít stejnou hustotu jako voda, a tedy se potopené nebude ani vynořovat, ani potápět hlouběji.

Fyzika za tímto jevem je velice jednoduchá, pokud víme, jaké síly na naše ponořené těleso působí. Jednou z nich je síla tíhová, kterou určíme jako $F_\mathrm{g} = m \cdot g$. Druhou, komplikovanější silou je tlaková síla hydrostatického vztlaku.

Její výpočet také není složitý: $F_\mathrm{vz} = V \cdot \rho \cdot g$. Těleso, které jsme vnořili do kapaliny, se nebude pohybovat právě tehdy, když výslednice všech sil na něj působících bude mít nulovou velikost. Jinými slovy, pokud se velikost tíhové síly bude rovnat velikosti síly vztlakové. Proto tyto dvě síly porovnáme:

$$F_\mathrm{g} = F_\mathrm{vz}\,,$$
$$m_\text{tělesa} \cdot g = V_\text{tělesa} \cdot \rho_\text{kapaliny} \cdot g\,.$$

Všichni jistě víme, že hmotnost je součin objemu a hustoty.

$$V_\text{tělesa} \cdot \rho_\text{tělesa} \cdot g = V_\text{tělesa} \cdot \rho_\text{kapaliny} \cdot g$$

Pokud zkrátíme vše, co jde, dostaneme podmínku, kterou když splníme, bude těleso plovat kdekoli v kapalině.

$$\rho_\text{tělesa} = \rho_\text{kapaliny}$$

Hustotu $\rho_\text{tělesa}$ spočítáme snadno pomocí vzorečku $\rho = m/V$, a tím zjistíme i hustotu kapaliny.

Pomůcky a jejich příprava

K měření jsme využili dva kousky PVC trubky, na oba konce každé trubky jsme silikonem přilepili kolečko vystřižené z lina. Jedna trubka má průměr (11,10±0,05) cm a délku (22,00±0,05) cm. Jí budeme měřit hustotu vody, kterou si napustíme do kbelíku. Druhá trubka byla komplikovanější, protože jsme nechtěli vyplýtvat veliké množství oleje, který jsme si zvolili jako druhou kapalinu. Využili jsme tedy speciální hrnec, který je vysoký a má tvar válce. Druhou trubku jsme proto koupili jen s průměrem (7,50 ± 0,05) cm a délkou (20,00 ± 0,05) cm, aby se vešla do hrnce. Stačilo již jen do trubek vyvrtat díry pro plnění závažím, za které jsme zvolili písek. Jednu z použitých trubek můžete vidět na obrázku 6.

Obr. 6: Příklad měřicího přístroje.

Měření

Vodu i olej jsme si na začátku předehřáli na 20 °C. V obou případech jsme do trubek sypali písek do doby, než se potápěly, a poté jsme ubrali pět gramů písku a zkusili válec potopit znovu. Když se trubka nevynořovala, ani nepotápěla, osušili jsem ji a následně celou zvážili. Nejmenší dílek měření tvořilo 5 g, protože to je nejmenší hmotnost, která změní chování válce. Šlo by měřit i po menších dílcích, avšak poté není poznat, zda válec ovlivňuje hustota, nebo proudy v kapalině. Nejistota naší váhy je oproti této nejistotě zanedbatelná.

Dírku na sypání písku jsme pokaždé zalepili izolepou. Větší válec se ve vodě potápěl s hmotností 2 105 g, 2 100 g bylo ideální a 2 095 g už bylo málo. Pro menší válec v oleji jsme tedy ideální hmotnost změřili jako (805 ± 5) g, kde nejistota 5 g je mezní (maximální uvažovaná).

Výpočet

Všichni jistě známe vzoreček $m = V \cdot \rho$ pro výpočet hmotnosti z objemu a hustoty. V našem případě m značí hmotnost celého válce i s podstavou a závažím, V je objem válce. Z tohoto vzorečku vyjádříme hustotu a místo V dosadíme vztah pro výpočet objemu válce[3]

$$\rho = \frac{m}{\pi \cdot r^2 \cdot h}$$

Do hmotnosti musíme započítat samozřejmě válec i závaží. Proto jsme při pokusu měřili celkovou hmotnost.

U vody dostáváme hustotu $(986 \pm 13)\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a u oleje $(911 \pm 20)\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Po tomto měření jsme ještě měřili hustotu přímo. Zvážili jsme odměrný válec a nalili jsme do něj vodu a po vysušení olej. Hmotnost jednoho litru vody byla 996 gramů a litru oleje 917 gramů. Použitý odměrný válec měl nejmenší dílek 10 ml a naše váha měří s přesností na jeden gram. Protože jsme odměřili přesně litr, hustoty se budou snadno počítat. Pro hustotu vody tak dostáváme $(996 \pm 5)\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a pro olej $(917 \pm 5)\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Pro výpočet nejistoty měření jsme ve všech případech použili vzorec pro skládání nejistot ze článku Hokus Pokus na našich webových stránkách.

Diskuze

K nepřesnostem měření přispěly především chyby při měření délek, poloměrů a hmotností trubek. Nejmenší jednotky našich měřicích přístrojů byly milimetry a gramy.

Je složité zjistit přesnou hmotnost, pro jakou tělesa plovou, protože jsou ovlivněna i proudy ve vodě. Trubky nemusely být přesně uříznuté a jejich otvor kruhový. Dále se mohlo při potopení deformovat lino tvořící podstavy válců. Větší odchylka měření hustoty oleje pochází z menšího průměru trubky, nepřesnost tedy narostla v poměru k průměru.

Závěr

Měření hustot kapalin substituční metodou je jedna z možností měření hustot, ale existují i jiné a přesnější způsoby, jako například změření obsahu a hmotnosti. U této přímé metody jsme díky jednoduššímu postupu eliminovali většinu nepřesností, a tím pádem máme důvěryhodnější výsledek. To se dle očekávání projevilo na menší nejistotě měření v metodě přímé. Oba naše výsledky se nicméně v rámci přesnosti shodují.

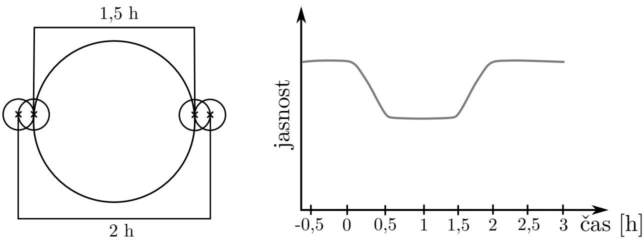
Martin Kysela
`martink@vyfuk.mff.cuni.cz`

[3] kruhové podstavy krát výška neboli $V = S \cdot h = \pi r^2 h$.

Úloha IV.V ... Slunce jasná světů jiných 7 bodů; průměr 6,00; řešilo 29 studentů

Exoplaneta rovnoměrně obíhá kolem mateřské hvězdy po kruhové dráze s poloměrem 0,100 au *a periodou* 4,00 dny. *Zákryt mateřské hvězdy trvá* 2,00 hodiny. *Od začátku zákrytu po okamžik, kdy se už pozorovaná intenzita nemění, uplyne* 30,0 minut. *Zastávka v minimu tedy trvá hodinu. Nakreslete světelnou křivku tranzitu exoplanety i s vhodnými popisky os. Určete poloměr mateřské hvězdy a poloměr exoplanety, pokud víme, že se soustava nachází velmi daleko od nás (paprsky přicházejí zhruba rovnoměrně) a že se nacházíme v rovině oběhu planety.*

Tuto úlohu můžeme řešit pomocí poměrů délek zákrytů a oběžných period. Vzhledem k tomu, že se od nás planeta nachází velmi daleko, paprsky z obou krajů hvězdy k nám přicházejí téměř rovnoběžně. Z tohoto důvodu a za předpokladu, že planeta obíhá kolem hvězdy rovnoměrně, platí, že poměr času poklesu intenzity t_1 k oběžné periodě P je stejný jako poměr průměru planety $2r_\mathrm{p}$ a obvodu orbity $2\pi R$. Pamatujme, že astronomická jednotka je $1\,\mathrm{au} = 1{,}496\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$.



Obr. 7: Schéma a světelná křivka tranzitu exoplanety

$$\frac{t_1}{P} = \frac{2\cdot r_\mathrm{p}}{2\pi R} \quad \Rightarrow \quad r_\mathrm{p} = \pi R \frac{t_1}{P} = 2{,}45\cdot 10^8\,\mathrm{m} = 3{,}5\,\mathrm{R_J}\,,$$

kde $R_\mathrm{J} = 69\,911\,\mathrm{km}$ značí poloměr Jupitera, který je téměř dvakrát větší než největší známá exoplaneta. Nyní můžeme určit poloměr hvězdy. Abychom se nepřepočítali, určíme čas přechodu středu exoplanety přes celý disk. Je tedy třeba z obou stran zákrytu odečíst čas 15 min, což je čas, za který přejde poloměr exoplanety přes okraj hvězdného disku. Odpovídající čas přechodu je tedy $t_2 = 90\,\mathrm{min}$. Argument s poměry časů můžeme aplikovat i zde:

$$\frac{t_2}{P} = \frac{2\cdot r_\mathrm{s}}{2\pi R} \quad \Rightarrow \quad r_\mathrm{s} = \pi R \frac{t_2}{P} = 7{,}34\cdot 10^8\,\mathrm{m} = 1{,}06 R_\mathrm{s}\,,$$

kde $R_\mathrm{s} = 695\,500\,\mathrm{km}$ je poloměr Slunce.

Tomáš Patsch
patscht@vyfuk.mff.cuni.cz

Marco Souza de Joode
joode@vyfuk.mff.cuni.cz

Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**V**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**172**
1.–2.	*Julie Krčmařová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	3	–	–	1	–	–	–	**4**	**18**
1.–2.	*Alžběta Sochorová*	G, Blovice	4	–	–	–	–	–	–	**4**	**18**
3.	*Kamila Vaníčková*	ZŠ Na Šutce, Praha 8 - Troja	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**10**
4.–6.	*Naděžda Nečadová*	Základní škola nám. Curieových P	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
4.–6.	*Václav Prachař*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
4.–6.	*Anežka Prachařová*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**V**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**172**
1.	*Vojtěch Černý*	G Jana Keplera, Praha	5	5	6	6	7	4	7	**40**	**151**
2.	*Kamilo Tomáš*	G Jana Keplera, Praha	5	5	6	6	7	2	4	**35**	**146**
3.	*Kosma Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	5	5	6	6	5	4	7	**38**	**123**
4.	*Klára Souza de Joode*	G Jana Keplera, Praha	5	5	–	6	–	5	–	**21**	**64**
5.	*Elen Šlapotová*	G Frýdecká, Český Těšín	4	5	6	6	–	–	–	**21**	**21**
6.	*Nina Naxerová*	G Jana Keplera, Praha	4	1	–	1	–	–	–	**6**	**18**
7.	*Jan Novák*	G, Písek	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**16**
8.	*Kateřina Menšíková*	Arcibiskupské G, Praha	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**5**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**V**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
1.	*Stela Srpová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	6	7	6	7	**37**	**145**
2.	*Lada Srpová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	5	6	7	6	7	**36**	**143**
3.	*Michal Stroff*	G, Budějovická, Praha	–	5	4	6	6	6	6	**33**	**136**
4.	*Veronika Menšíková*	Arcibiskupské G, Praha	–	5	6	6	7	5	7	**36**	**132**
5.	*Jiří Preč*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	5	3	6	7	3	7	**31**	**127**
6.	*Adam Pustka*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	5	6	3	3	5	**27**	**118**
7.	*Damian Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	5	6	7	**35**	**112**
8.	*Vojtěch Janáček*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	3	6	–	6	1	**21**	**97**
9.	*Ester Šlapotová*	G Frýdecká, Český Těšín	–	5	6	6	7	–	7	**31**	**89**
10.	*Ludmila Šírová*	Mensa G, Praha 6	–	5	5	6	7	3	7	**33**	**83**
11.	*Michal Dobrovolný*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	5	2	6	–	3	–	**16**	**67**
12.–13.	*Mark Joy*	G, Havlíčkův Brod	–	5	2	6	3	–	–	**16**	**64**
12.–13.	*Vojtěch Novosad*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	2	6	3	–	3	**14**	**64**
14.	*Jana Vestfálová*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	5	2	6	–	–	–	**13**	**48**
15.	*Vít Novák*	ZŠ Chyšky	–	5	2	6	2	–	–	**15**	**47**
16.	*Jan Ševeček*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**34**
17.	*Adam Mikulič*	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	6	–	–	–	**6**	**31**
18.	*Bartoloměj Vaníček*	ZŠ Na Šutce, Praha 8 - Troja	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**29**
19.	*Lea Bumbálková*	Mendelovo G, Opava	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**28**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
20.	*Vojtěch Mišičko*	G, Jateční, Ústí nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
21.	*Tomáš Řehák*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	–	6	–	–	7	**18**	**26**
22.	*Patricie Labuťová*	G B. Němcové, HK	–	4	–	6	–	–	–	**10**	**17**
23.	*Nina Štefanovičová*	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
24.–25.	*Šimon Mach*	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
24.–25.	*Amelie Vítková*	G a SOŠP, Čáslav	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
26.	*Kristýna Kábrtová*	G a SOŠ Havlíčkova, Úpice	–	–	–	–	–	–	–	–	**9**
27.	*Alexander Spálený*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
28.	*Melánie Boušková*	G Pod Svatou horou, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	**1**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
1.	*Matyáš Matta*	Masarykovo G, Plzeň	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**146**
2.–3.	*David Něnička*	G, Rožnov pod Radhoštěm	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**139**
2.–3.	*Eduard Plic*	Masarykovo G, Plzeň	–	5	5	6	7	7	7	**37**	**139**
4.	*Magdalena Hybnerová*	G, Jateční, Ústí nad Labem	–	5	2	6	5	7	6	**31**	**137**
5.–7.	*Anastasia Bredikhina*	G Jana Keplera, Praha	–	5	5	6	7	5	7	**35**	**131**
5.–7.	*Adam Bretšnajder*	G Z. Wintra, Rakovník	–	5	3	6	7	5	7	**33**	**131**
5.–7.	*Matouš Mišta*	G, Olomouc-Hejčín	–	5	4	6	7	5	7	**34**	**131**
8.	*Ivan Žemlička*	G Ústavní, Praha	–	5	6	1	7	5	7	**31**	**128**
9.	*Pavla Šimová*	G, Šumperk	–	5	6	1	7	6	7	**32**	**126**
10.	*Michal Sykáček*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	5	5	6	7	5	4	**32**	**110**
11.	*Jan Rous*	G J. Barranda, Beroun	–	5	3	6	7	5	6	**32**	**101**
12.	*Václav Verner*	PORG, Praha	–	5	5	6	5	2	1	**24**	**95**
13.	*Jan Souchop*	G, Mikulov	–	5	5	6	3	–	7	**26**	**89**
14.	*Patrik Kadlec*	První české G, Karlovy Vary	–	5	2	6	5	6	5	**29**	**85**
15.	*Lucie Kvitová*	G, Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	–	**54**
16.	*Vojtěch Muller*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**47**
17.	*Dana Myškeříková*	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	**33**
18.	*Jaroslava Zimplová*	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	1	–	–	–	**1**	**31**
19.	*Yasmin Fazla*	G, nám. TGM, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	**30**
20.	*Vojtěch Beneš*	G J. Palacha, Mělník	–	–	–	–	–	–	–	–	**29**
21.	*Jindřich Urban*	ZŠ Divišov	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
22.–23.	*Tomáš Musil*	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**25**
22.–23.	*Jáchym Předota*	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**25**
24.–25.	*Jan Havlík*	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
24.–25.	*Jakub Merta*	ZŠ Brno - Bystrc	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
26.	*Eduard Frühauf*	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**
27.	*Michal Friml*	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
28.–29.	*Jakub Škaloud*	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
28.–29.	*Lucie Židková*	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
30.	*Teo Bumbálek*	Mendelovo G, Opava	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**19**
31.	*Jan Kroupa*	ZŠ T. G. Masaryka Klatovy IV	–	1	–	–	–	–	–	**1**	**14**
32.	*Štěpán Berek*	ZŠ Dobrá	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
33.	*Klára Nabiová*	ZŠ Velké Březno	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
34.	*Rebeka Heřmanová*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
35.–36.	*Jan Vacek*	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
35.–36.	*Rebeka Zábranská*	PORG, Praha	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
37.	*Robert Ernest*	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**3**
38.	*Matyáš Malát*	ZŠ T. G. Masaryka Klatovy IV	–	–	–	–	–	–	–	–	**1**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.