

Úloha I.3 ... Zvláštní pití vody

6 bodů; průměr 4,30; řešilo 101 studentů

Paťo si koupil brusinkový sirup, který mu moc chutná. Nejdříve si nápoj připravil tak, že smíchal 3 dl vody s 1 dl sirupu. Pak z něho vypil pouze 3 dl. K zbytku nápoje potom přilil 1 dl sirupu a 2 dl vody. Znovu vypil pouze 3 dl a postup mnohokrát opakoval. Jaká koncentrace sirupu¹ se ustálí ve sklenici?

K vyřešení této úlohy nám postačí jednoduchá úvaha. Počáteční koncentrace Paťovy šťávy je $c_1 = 1/4$. V dalších krocích pak Paťo po upití vždy přidá 3 dl nápoje o koncentraci $c = 1/3$ (1 díl šťávy na 2 díly vody). Vzhledem k tomu, že se tento postup opakuje až do nekonečna, koncentrace se ustálí na hodnotě právě $c = 1/3$. Náznorněji to můžeme vysvětlit tím, že do nápoje stále přiléváme šťávu o stejné koncentraci, která postupně „vytěsňuje“ koncentraci původní.

Nebo si to můžeme také představit tak, jako bychom měli obrovské (nekonečné) množství nápoje o koncentraci c a do něj přilili pouze 1 díl nápoje o koncentraci c_1 . Výsledná koncentrace se tímto prakticky nijak nezmění.

Kdo takové úvaze nechce věřit, má několik možností, jak si její správnost ověřit. Tím jednodušším způsobem je výpočet pomocí programu EXCEL® (Calc). Ale ještě než jej provedeme, bude vhodné prvně určit, jaká bude koncentrace nápoje ve druhém kroku (tj. po prvním přilítí 1 dl šťávy a 2 dl vody). Když mícháme dva nápoje o různé koncentraci c_1 , c a objemu V_1 , V a chceme zjistit výslednou koncentraci c_2 nově vzniklého nápoje, poslouží nám k tomu tzv. směšovací rovnice

$$c_2 V_2 = c_1 V_1 + cV,$$

kde $V_2 = V_1 + V$. Tu si upravíme pro naše potřeby na

$$c_2 = \frac{c_1 V_1 + cV}{V_2}.$$

Vidíme, že ve směšovací rovnici je vždy první člen roven koncentraci v předcházejícím kroku (tj. předcházející výsledek) vynásobený objemem 1 dl a druhý člen je vždy $cV = 1/3 \cdot 3 \text{ dl} = 1 \text{ dl}$. V Excelu si vytvoříme jednoduchou tabulku, ve které bude v buňce **A1** hodnota 0,25 (jako prvotní koncentrace) a v buňce **B1** hodnota 1 (představující druhý člen). Následující hodnotu koncentrace, tj. hodnotu políčka **A2** určíme podle vzorce

$$= (\text{A1} + \text{B\$1}) / 4,$$

který vyplývá ze směšovací rovnice. Pokud tento vzorec roztáhneme přes několik řádků (viz tabulka), uvidíme, že se výsledná koncentrace rychle přibližuje k naší známé třetině.

| | A | B |
|---|--------------|---|
| 1 | 0,25 | 1 |
| 2 | 0,3125 | |
| 3 | 0,328125 | |
| 4 | 0,33203125 | |
| 5 | 0,3330078125 | |

Komu se postup s využitím Excelu zdá stále příliš málo matematický, může si správný výsledek i vypočítat. Nejdříve pomocí směšovací rovnice určíme koncentraci nápoje ve druhém kroku

$$c_2 = \frac{\frac{1}{4} \cdot 1 \text{ dl} + \frac{1}{3} \cdot 3 \text{ dl}}{4 \text{ dl}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} = \frac{5}{16} \approx 0,313.$$

¹Pod pojmem koncentrace myslíme podíl objemu sirupu k celkovému objemu nápoje.

A podobně určíme i koncentraci nápoje ve třetím kroku

$$c_3 = \frac{c_2 V_2 + cV}{V_3} = \frac{\frac{5}{16} \cdot 1 \text{ dl} + \frac{1}{3} \cdot 3 \text{ dl}}{4 \text{ dl}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} = \frac{21}{64} \approx 0,328.$$

Vidíme, že se výsledné hodnoty postupně přibližují ke správné hodnotě 0,333... Dále také můžeme z těchto dvou výsledků vyzorovat, že koncentrace nápoje se v každém následujícím kroku vždy zvýší o člen $(1/4)^n$, kde n odpovídá pořadí daného kroku. Výslednou koncentraci nápoje po n krocích můžeme potom vyjádřit jako

$$c_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}.$$

Teď už je jen otázkou, jak něco takového vypočítat, pokud bude n rovno nekonečnu. To, co počítáme, je tzv. součet nekonečné geometrické řady. Geometrická řada je charakterizovaná (mimo jiné) prvním členem a_1 a tzv. kvocientem q , který nám říká, kolikrát musíme vynásobit jakýkoli člen posloupnosti, abychom dostali člen následující. V našem případě je $a_1 = 1/4$ a $q = 1/4$. Pro součet geometrické řady, která splňuje podmínku $-1 < q < 1$, platí vztah

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Výsledná koncentrace bude

$$c_\infty = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Vidíme, že nám vyšla stejná hodnota jako v úvodní úvaze.

Veronika Dočkalová
verca@vyfuk.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.