

## Úloha I.4 ... Píďa s Úďou

8 bodů; průměr 4,63; řešilo 46 studentů

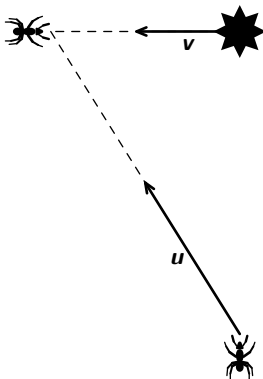
Mravenec Píďa jde přímou cestou ke svému mraveništi rychlostí  $\mathbf{v} = 1 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ . Když je ve vzdálenosti  $d = 30 \text{ cm}$  od svého cíle, uvidí jej jeho kamarád Úďa, který mu potřebuje nutně sdělit důležitou zprávu. Úďa se nachází ve vzdálenosti  $l = 40 \text{ cm}$  od mraveniště (viz obrázek) a pohybuje se rychlostí  $\mathbf{u} = 2 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ . Úďa chce vědět směr, jakým se má pohybovat, aby se s Píďou potkal. Abyste mu pomohli odpovědět, zjistěte:

1. Jak vypadá svět z pohledu Píďy? Píďovi se v jeho vztažné soustavě zdá, že se nepohybuje on, ale všechno okolo. Popište směr a velikost tohoto zdánlivého pohybu a nakreslete obrázek, kde šipkami vyznačíte, jak se bude vzhledem k Píďovi přibližovat mraveniště.
2. Jaký směr bude mít v této soustavě rychlost Úďy, aby byla splněna podmínka, že se s Píďou potkají? Zakreslete do obrázku z předchozího bodu.
3. Zkuste geometricky zkonstruovat, nebo alespoň načrtnout směr Úďovy rychlosti (když se vrátíme z Píďovy vztažné soustavy zpět do soustavy spojené se zemí).

1. Keď sa Píďa pohybuje smerom k mravenisku rýchlosťou  $\mathbf{v} = 1 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ , vo svojej vzťažnej sústave<sup>1</sup> stojí (je v pokoji). Jeho pohyb sa prejaví tak, že sa k nemu bude približovať mravenisko. A to takou istou rýchlosťou, akou sa pohybuje Píďa voči zemi. Akurát s tým rozdielom, že vektor rýchlosti bude orientovaný opačným smerom, hoci jeho veľkosť bude stále rovnako veľká.

Všeobecne môžeme povedať, že všetky predmety, ktoré sa vzhľadom na zem nepohybujú, sa vzhľadom na Píďu pohybujú po rovnobežných priamkach s vektorom rýchlosti opačným k vektoru  $\mathbf{v}$ .

2. Úďa sa snaží prísť čo najrýchlejšie k Píďovi, preto sa bude pohybovať čo najkratšou dráhou, teda po priamke. Keďže sa obaja mravci nakoniec stretnú a Píďa vo svojej sústave stojí, jediná možnosť je, že Píďovi sa bude zdať, že Úďa ide priamo k nemu.

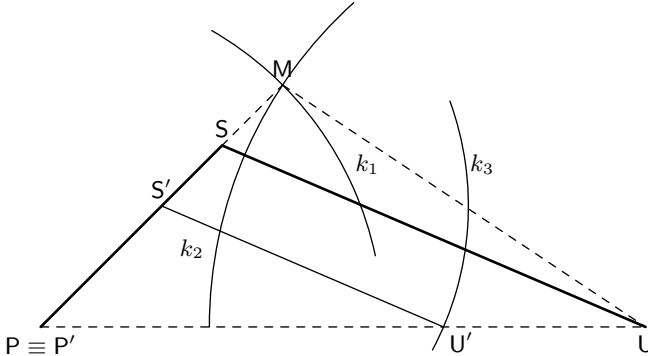


Obr. 1: Svet z pohľadu Píďy

3. Ako prvé si musíme uvedomiť, že táto časť príkladu sa dá len veľmi ťažko vypočítat. Omnoho jednoduchšie je riešiť ju konštrukčne.

<sup>1</sup> Vzťažná sústava spojená s Píďom je súradnicová sústava, ktorej počiatok je v Píďovi. Všade, kam sa Píďa pohne, sa pohne aj táto sústava.

Najskôr si ujasnime, čo vieme. Oba sa stretnú niekde medzi Pídovou začiatočnou pozíciou a mraveniskom. Ak si bod stretnutia označíme ako S (viď obrázok 2), musí platiť  $\vec{SP} \subset \vec{MP}$ . Tiež vieme, že Úda ide dvojnásobnou rýchlosťou ( $2v = u$ ). Keďže obaja k miestu stretnutia putujú rovnaký čas, Úda musí prejsť dvakrát dlhšiu trasu ako Pída, teda  $|SU| = 2|SP|$ . Jadro problému, ako je z obrázku jasné, je konštrukcia  $\triangle USP$ .



Obr. 2: Náčrt

Každý trojuholník vieme zostrojiť vtedy, keď poznáme aspoň 3 jeho vlastnosti. Tu poznáme  $|PU|$ , priamku, na ktorej sa nachádzajú body S a P<sup>2</sup> a pomer dĺžok strán  $|SU|$  a  $|SP|$ . Porovnaním s učebnicovými príkladmi môžeme usúdiť, že priama konštrukcia je nemožná. Preto si zostrojíme pomocný trojuholník  $\triangle U'S'P'$ , ktorý bude spĺňať posledné dve vlastnosti.

Vidíme, že platí  $P' \equiv P$ , preto je tento trojuholník „zmenšením“ hľadaného trojuholníka. Podľa vety *uuu* je s ním podobný. Matematicky zapísané  $\triangle U'S'P' \cong \triangle USP$ .

Z Pytagorovej vety vieme vypočítať dĺžku  $|PU|$

$$|PU| = \sqrt{(30 \text{ cm})^2 + (40 \text{ cm})^2} = 50 \text{ cm}.$$

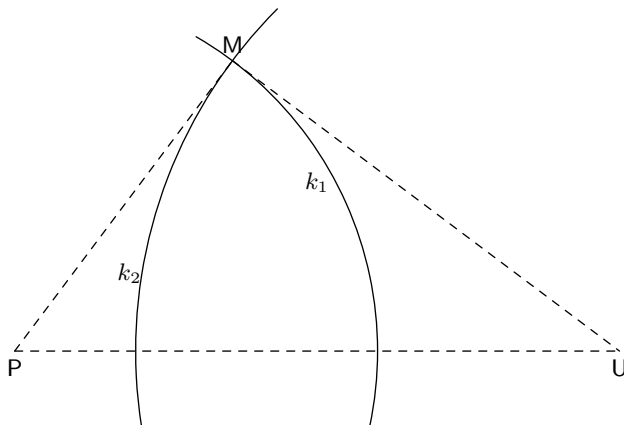
Keďže zadané rozmery sú na rysovanie priveľké, celú konštrukciu sme zmenšili v mierke 1:5. Úplne na koniec ešte zvolíme  $|PS'| = 3 \text{ cm}$  a môžeme sa konečne pustiť do rysovania.

Tu je postup:

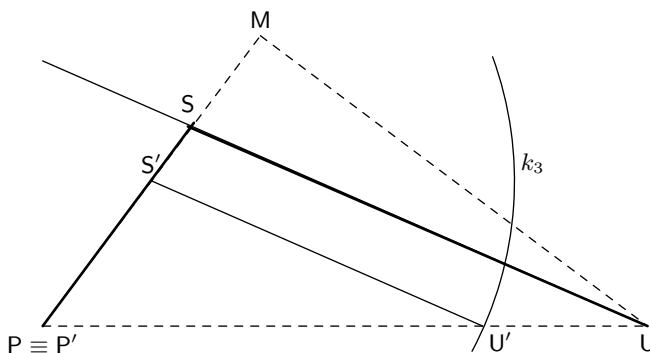
- |   |                                  |
|---|----------------------------------|
| 1. PU, $ PU  = 10 \text{ cm}$           | 7. $k_3, k_3 (S', 6 \text{ cm})$ |
| 2. $k_1, k_1 (P, 6 \text{ cm})$         | 8. $U', U' \in k_3 \cap  PU $    |
| 3. $k_2, k_2 (U, 8 \text{ cm})$         | 9. $q, S \in q; U' \in q$        |
| 4. M, $M \in k_1 \cap k_2$              | 10. $s, s \parallel q; U \in q$  |
| 5. $p, P \in p; M \in p$                | 11. $S, S \in s \cap  PM $       |
| 6. $S', S' \in p;  PS'  = 3 \text{ cm}$ | 12. $\triangle USP$              |

Ak sme správne a presne rysovali, po zmeraní dĺžky a vynásobení mierkou zistíme, že Pída prešiel  $d_p = 20,1 \text{ cm}$  a Úda  $d_u = 40,2 \text{ cm}$ . K rovnakému výsledku vieme prísť aj výpočtom, čo je však veľmi obtiažne.

<sup>2</sup> V skutočnosti poznáme veľkosť uhla  $\sphericalangle UPS$ .



Obr. 3: Konštrukcia bodu M



Obr. 4: Konštrukcia  $\triangle U'S'P'$  a výslednej trajektórie

*Poznámky k došlým riešením*

Mnohí z vás objavili spôsob riešenia pomocou Pythagorovej vety a pomocou neho došli k správ-  
 nemu riešeniu. Objavilo sa tiež správne riešenie pomocou vektorov, čo ma veľmi potešilo. Všetci  
 mnohí z vás úlohu riešili metódou „pokús – omyl“ tým, že skúšali odhadnúť bod, kde sa mravci  
 stretnú, a následne dopočítavať vzdialenosti. Toto riešenie nie je fyzikálne a nie je ani presné – pri

takomto odhade nedostanete presnú hodnotu, a to ani ak by ste svoj odhad veľakrát spresňovali.

*Michal Červenák*

`miso@vyfuk.mff.cuni.cz`

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.