

Úloha I.C ... Zrádná komunikace

8 bodů; (chybí statistiky)

1. Co znamená tato šifra?

$$\left(\frac{s}{t}\right) \cdot (y_m \sin(\omega t)) \cdot (ma) \cdot (RI) \cdot \left(\frac{F}{x}\right)$$

Nezapomeňte napsat, jak jste při dešifrování postupovali.

2. Reynoldsovo číslo Re je bezrozměrná veličina, která charakterizuje proudění tekutiny v potrubí. Který vztah je správně vyjádření tohoto čísla?

$$Re = \frac{dv\rho}{\eta + v}, \quad Re = dv\rho^2\eta, \quad Re = \frac{Sv\rho}{\eta l},$$

kde d je průměr, S je průřez a l je délka potrubí, kterým protéká kapalina s hustotou ρ , viskozitou¹ η a rychlostí v . Pokud nějakou z možností vyloučíte, nebo naopak, schválíte, napište vysvětlení, proč jste tak učinili.

3. Jeden atom železa ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ má hmotnost $m = 9,3 \cdot 10^{-26}$ kg. Spočítejte, kolik atomů železa dohromady tvoří Bětčín železný prsten s hmotností $M_1 = 2\,500\,000\,000$ ng a náhrdelník s hmotností $M_2 = 8 \cdot 10^{-11}$ Tg ze stejného materiálu. Výsledek rozumně zaokrouhlete.

Milí řešitelé, v prvom rade by sme chceli povedať to, že na vyriešenie všetkých troch častí úlohy, nepotrebujeme nič iné, než vedieť pracovať s jednotkami. Možno vám to príde neuveriteľné, ale ukážeme si, že je to skutočne tak.

1. Uzavreté výrazy v oblých zátvorkách nám napovedajú, že zrejme bude dobré rozšífrovat každý uzavretý výraz samostatne. Všimnime si, že takýchto výrazov je tam presne päť. Poďme vyriešiť separátne každý jeden z nich

$$\left(\frac{s}{t}\right)$$

Písmenká s a t nám nápadne pripomínajú veličiny pre *dráhu* a *čas*. Ich podielom dostávame rýchlosť v s jednotkou meter za sekundu.

¹Viskozita je veličina, která charakterizuje tření v kapalině. Její jednotka je Pa·s.

$$(y_m \sin(\omega t))$$

Výraz v zátvorke sínusu musí byť bezrozmerný,² takže jediná veličina s fyzikálnou jednotkou je y_m . Tá zrejme vyjadruje akúsi súradnicu, čiže jej jednotka je meter. A nie je len tak hocijaká. Pred sebou totiž máme rovnicu kmitavého pohybu, ktorá sa zvyčajne píše ako

$$y = y_m \sin(\omega t) .$$

(ma)

Hmotnosť krát zrýchlenie. . . to musí byť jedine sila F . Newton by vám o tom narozprával, podľa neho je tento zákon predsa pomenovaný. Všímavejšiemu čitateľovi určite neušlo, že práve tento zákon je spomenutý priamo vo Výfucení.

(RI)

Veľké R v spojení s veľkým I môže znamenať len jediné, a to Ohmov zákon $U = RI$.

$$\left(\frac{F}{x}\right)$$

Tu nám pomôže si výraz trochu upraviť. Vidíme, že musíme nájsť niečo, z čoho po vynásobení akousi veličinou x dostaneme silu F . Chvilka listovania v tabuľkách nám prezradí, že je to známy vzorec pre predĺženie pružiny

$$F = kx ,$$

kde k je tuhosť pružiny. Keď si to dáme všetko dokopy, dostávame riešenie $v \cdot y \cdot F \cdot U \cdot k$ a po pridaní štipky fantázie nám vychádza krásny originálny Výfuk ☺.

2. Túto časť môžeme vyriešiť veľmi jednoducho, ak sa poriadne pozrieme na jednotky jednotlivých výrazov. Najskôr ich dosadíme do rovníc namiesto veličín. Potom zložitejšie jednotky rozložíme na základné SI (toto vieme spraviť skutočne s každou zložitejšou jednotkou, pretože každá jedna z nich je odvodená zo základných jednotiek SI). No a nakoniec pokrátime, čo sa bude dať. Tento magický postup, ktorý sa chystáme použiť, sa nazýva *rozmerová analýza*, ktorá je úžasná v tom, že vďaka nej dokážeme odhaliť, ktorá z rovníc má bezrozmernú povahu (pretože zadanie hovorí, že Reynoldsovo číslo má byť bezrozmerné). Predtým, ako sa pustíme do samotného rozboru, si radšej povedzme, v akých jednotkách je spomínaná viskozita η . Zo zadania vieme jednoduchý tvar jej jednotky Pa·s, ktorý si vieme upraviť. Využijeme toho, že tlak je vlastne sila na plochu. Preto aj pascal, jednotka tlaku, musí byť rovná newtonu na meter štvorcový³

$$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{s} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^2} \cdot \text{s} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} .$$

²Zapamätajte si, že ak dosádzame do vnútra funkcií $\sin()$, $\cos()$, $\text{tg}()$, $\log()$, $\ln()$, . . . tak výraz, ktorý dosádzame, musí byť bezrozmerný, tj. nemôže mať žiadnu fyzikálnu jednotku. Nikdy nemôžeme totiž napísať napríklad $\sin(1 \text{ kg})$. Často sa síce stretnete s jednotkou nazývanou radián, no treba si uvedomiť, že to nie je skutočná fyzikálna jednotka, preto vieme, koľko je $\sin(\pi \text{ rad})$.

³V úprave jednotky viskozity η sme využili ešte fakt, že 1 newton je vlastne sila, ktorá urýchľuje jednodukilogramové teleso so zrýchlením $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Teraz sa môžeme pustiť do rozpisovania jednotiek troch kandidátov na Reynoldsovo číslo

$$[\text{Re}] = \left[\frac{dv\rho}{\eta + v} \right] = \frac{\frac{\text{m} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} + \frac{\text{m}}{\text{s}}}} = \frac{\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}}{\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} + \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{kg}}{\text{kg} + \text{m}^2}.$$

Vidíme, že tadiaľto cesta nevedie. V menovateli zlomku totiž sčítavame dve rôzne jednotky, čo je absolútny fyzikálny nezmysel. Skúsme ďalšiu rovnicu

$$[\text{Re}] = [dv\rho^2\eta] = \text{m} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)^2 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} = \text{m} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{kg}^2}{\text{m}^6} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} = \frac{\text{kg}^3}{\text{m}^5 \cdot \text{s}^2}.$$

Opäť nič. Dúfajme, že správna jednotka vyjde aspoň v poslednom vzorci

$$[\text{Re}] = \left[\frac{Sv\rho}{\eta l} \right] = \frac{\frac{\text{m}^2 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \cdot \text{m}} = \frac{\frac{\text{kg}}{\text{s}}}{\frac{\text{kg}}{\text{s}}} = 1.$$

Ajha! Posledné vyjadrenie sa ukázalo ako bezrozmerné. Naše hľadanie je teda na konci. Na mieste by však mohla byť otázka: „Je táto tretia rovnica ozaj správnym vyjadrením Reynoldsovo čísla?“ Správnu odpoveďou by bolo: „Minimálne jednotkovo určite.“ Z rozboru jednotiek napríklad nevieme, či nie je rovnica náhodou vynásobená dvojkou, prípadne inými bezrozmernými konštantami. V poslednom prípade by sme dostali „správny“ výsledok aj vtedy, keď by celý výraz dokonca lažal pod odmocninou. Správnosť vzorca si však môže každý overiť s pomocou dobrej literatúry.

- Super vedúci na táboroch nás učili, že ešte pred počítaním akéhokoľvek problému je výhodné si najskôr premeniť jednotky na základný tvar. Sčítavať kilogramy a nanogramy nie je zrovna najpraktickejšie a navyše, skoro vždy sa pri takých výpočtoch pomýlime. Upravme si teda jednotky pre zadané hmotnosti prsteňa M_1 a náhrdelníka M_2

$$M_1 = 2\,500\,000\,000 \text{ ng} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 0,0025 \text{ kg},$$

$$M_2 = 8 \cdot 10^{-11} \text{ Tg} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ kg} = 0,08 \text{ kg}.$$

Počet atómov železa v prsteni a náhrdelníku dohromady vypočítame naozaj jednoducho

$$N = \frac{M_1 + M_2}{m} = \frac{0,0025 \text{ kg} + 0,08 \text{ kg}}{9,3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}} \doteq 8,87 \cdot 10^{23} \doteq 8,9 \cdot 10^{23}.$$

Bětka teda vlastní približne $8,9 \cdot 10^{23}$ atómov železa.

Poznámky k došlým riešeniam

- Šifru ste mali na pár výnimiek všetci správne ☺.
- Často som videl to, že ste vylúčili niektorú možnosť s tým, že ste jednoducho prehlásili, že „hustota nemôže byť na druhú“ alebo „Re nezávisí od dĺžky potrubia l “ ... To je všetko veľmi pekné, ale my predsa nevieme, čo je to tá Re, čiže ani netušíme, od čoho má a od čoho nemá závisieť. V zadaní sa povedalo len to, že je to bezrozmerná veličina, čo sa dalo skutočne využiť.
- Niektorí ste si občas zle premenili jednotky. Za to som strhával 1 bod.

Jakub Bahyl

kubo@vyfuk.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.