VÝFUK

Výpočty fyzikálních úkolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ ročník III Prázdninová série

Milí řešitelé,

prázdniny jsou už za námi. My však věříme, že jste si je užili v největší možné míře a třeba i zavítali na náš letní tábor, který byl i tento rok jednoduše skvělý.

Těší nás, že jste nezapomněli na prázdninovou sérii, do které se zapojilo více než 150 řešitelů. To, jak jste dopadli, naleznete na konci této brožurky nebo na našem webu.[1] V brožurce také najdete zadání a vzorové řešení všech šesti příkladů prázdninové série.

Gratulujeme všem vítězům! Pokud jste dosáhli více než dvaceti pěti bodů, měli byste v obálkách najít i diplom a věcnou cenu. Jestliže jste se ocitli pod touto hranicí, vůbec se tím netrapte, řešte Výfuk dále a uvidíte, jak vaše bodové skóre poroste `:-)`.

První série 4. ročníku

V obálkach najdete čerstvou, první brožurku dalšího ročníku. Neváhejte a pusťte se do řešení! Nezapoměňte dodržet všechny náležitosti pro psaní řešení,[2] hlavním pravidlem je každý příklad psát na samostatný list papíru. Zapojit se je nesmírně jednoduché, stačí nám do uvedeného termínu poslat rešení. Návratku nám už posílat nemusíte.

Zadání Výfuku zkuste ukázat i svým kamarádům a spolužákům se zájmem o fyziku. Možná právě díky vám začnou řešit Výfuk a stejně jako vy objeví opravdovou krásu fyziky.

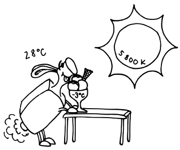
Hodně zdaru v novém školním roce a při řešení 4. ročníku Výfuku přejí

Organizátoři

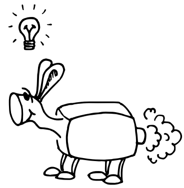
vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

[1] http://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/poradi/r3pr.

[2] http://vyfuk.mff.cuni.cz/jak_resit/navody



Řešení I. prázdninové série



Úloha I.1 ... Jak veliký je světelný rok? 9 bodů; (chybí statistiky)

Může se to zdát zvláštní, ale světelný rok (zkratka ly*, z anglického light year) není jednotka času, nýbrž délky. 1 světelný rok je vzdálenost, kterou urazí světlo šířící se vakuem za jeden rok. Vzdálenost to bude impozantní, poněvadž rychlost světla je přibližně*

$$c = 300\,000\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

*Dokážete si ale představit, jak velká může tato vzdálenost být? Zjistit to je jednoduché: stačí rychlost c vynásobit počtem vteřin, které má jeden rok (*365 dní*) a dostaneme kýženou vzdálenost v kilometrech.*

Pro ještě lepší představu od vás žádáme, abyste délku světelného roku porovnali se známějšími délkami. Kolikrát je světelný rok větší, než:

a) 30*cm pravítko,*

b) poloměr Země, tedy 6 378 km*,*

c) vzdálenost Země-Slunce, tedy 150 000 000 km*. Této vzdálenosti se říká i astronomická jednotka (*1 AU*).*

Svůj postup řádně popište!

Keďže svetelný rok je jednotka vzdialenosti, skúsme si ju vyjadriť v základnej jednotke SI, v metroch. Rýchlosť svetla si môžeme jednoducho premeniť z $\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ na $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ prenásobením číslom 1 000 (pretože $1\,\mathrm{km} = 1\,000\,\mathrm{m}$)

$$c = 300\,000\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}} = 300\,000\,000\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 3\cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Poslednému tvaru zápisu sa hovorí *semilogaritmický* a vyjadruje číslo, ktoré sa začína trojkou, za ktorou nasleduje 8 núl.

Okrem rýchlosti svetla si do základných jednotiek SI, teda do sekúnd, vieme premeniť aj trvanie jedného roku

$$1\,\mathrm{rok} = 365\,\mathrm{dní} = 365\cdot 24\,\mathrm{hod} = 365\cdot 24\cdot 60\,\mathrm{min} = 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\,\mathrm{s} = 31\,536\,000\,\mathrm{s}\,.$$

Podľa vzorcu $s = vt$ vieme vypočítať dĺžku svetelného roku v metroch, ak si za v dosadíme rýchlosť svetla a za čas t trvanie jedného roku

$$1\,\mathrm{ly} = 3\cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\cdot 31\,536\,000\,\mathrm{s} \doteq 9{,}46\cdot 10^{15}\,\mathrm{m}\,.$$

Keď už máme vyjadrený svetelný rok v slušných jednotkách, stačí nám na metre previesť porovnávané dĺžky a vydeliť nimi dĺžku svetelného roku. Pre pravítko dostávame $30\,\mathrm{cm} = 0{,}3\,\mathrm{m}$, teda pomer k 1 ly je

$$p_1 = \frac{9{,}46\cdot 10^{15}\,\mathrm{m}}{0{,}3\,\mathrm{m}} \doteq 3{,}15\cdot 10^{16}\,,$$

čo je pre nás nepredstaviteľne veľké číslo. Skúsme teda premeniť na metre polomer Zeme: 6 378 km = 6 378 000 m. Po vydelení

$$p_2 = \frac{9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}}{6\,378\,000\,\mathrm{km}} \doteq 1{,}48 \cdot 10^{9}\,,$$

čo je 1,48 miliardy, teda číslo obrovské, ale už trochu lepšie predstaviteľné. Vidíme ale stále, že dĺžka svetelného roku je oproti Zemi stále obrovská.

Nakoniec si premeňme aj dĺžku astronomickej jednotky: 150 000 000 km = 150 000 000 000 m = $= 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m a vypočítajme pomer p_3

$$p_3 = \frac{9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}}{1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}} \doteq 63\,000\,.$$

Toto číslo je stále celkom veľké, no už je aj dobre predstaviteľné.

Z našich výpočtov sa zdá, že svetelný rok je naozaj veľká jednotka vzdialenosti. A skutočne sa používa pri určovaní vzdialenosti hviezd. Najbližšie hviezdy sú od Slnka vzdialené približne 5 ly, no nájdu sa aj hviezdy, ktoré sú vzdialené desaťtisíce svetelných rokov. Pozorované galaxie sú dokonca oveľa ďalej, konkrétne milióny až miliardy svetelných rokov. Na popis týchto vzdialeností sa používa ešte väčšia jednotka, zvaná parsek (značka pc). Síce parsek nie je od svetlného roku oveľa väčší (1 pc = 3,27 ly), no v astronomických meraniach je oveľa praktickejší.

Patrik Švančara
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.2 ... Záhadná voda

6 bodů; (chybí statistiky)

Proveďme následující pokus: vezměme skleničku a naplňme ji vodou až po okraj. Pak na skleničku položme tvrdší papír – tím skleničku „uzavřeme“. Budeme-li opatrní, můžeme skleničku převrátit dnem vzhůru. Voda se, navzdory tomu, že ji drží jen list papíru, nevylije. Jak je to možné?

Nakreslete si obrázek a zakreslete do něj všechny síly, které působí na papír. Zkuste vysvětlit, jak je možné, že voda zůstane uvnitř skleničky.

Pre začiatok dúfam, že ste si experiment vyskúšali, pretože o pozorovanom sa rozpráva najlepšie. Ak sa tak náhodou nestalo, prestaňte čítať tento vzorák a bežte si to skúsiť.

Predpokladajme teda, že experiment už máme úspešne za sebou (to znamená, že sme ostali suchí). Pozorovali sme jav, ktorý by človek na prvý pohľad nečakal – voda ani papier nepadli na zem tak, ako by intuícia kázala. Toto môže mať iba jedno riešenie: tiažové sily vody a papiera museli byť niečím kompenzované. Otázkou na mieste je, že odkiaľ sa takáto kompenzačná sila zobrala.

Keďže sa nenachádzame vo vákuu (to by sme nemali veľmi čo dýchať), tak sa skúsme zamyslieť nad tým, či okolitý vzduch nehrá v tomto prípade nejakú rolu. Keďže tohoto vzduchu sa okolo nás nachádza strašne veľa, tak má zmysel hovoriť o niečom, čo nazývame *atmosférický tlak*. Je to tlak, ktorým na nás pôsobí všetok vzduch nad nami a okolo nás. Jeho hodnota je približne $p_a = 101\,000$ Pa a na prvý pohľad to pôsobí ako absurdne veľké číslo. Je fakt, že v skutočnosti to je naozaj obrovský tlak, ale väčšina živočíchov (a aj ľudia) sú naň už evolučne zvyknutí a preto ho nepociťujú.

Všimnite si napríklad, že keď je na stole položená otvorená fľaša a ústami odsajeme z nej trošku vzduchu, tak má tendenciu sa zmrštiť. Je to spôsobené práve tým, že odsatím vzduchu znížime tlak vovnútri, čím vzniká tlakový rozdiel medzi vonkajším a vnútorným prostredím. Tento rozdiel tlakov pôsobí na plochu fľaše a reálne sa prejaví tlakovou silou, ktorá tlačí smerom dovnútra fľaše. Plast je ľahko ohnuteľný materiál, takže kladie iba malý odpor. Keď fľaša dostatočne zmenší svoj objem, sú tlaky opäť vyrovnané a systém je opäť v rovnováhe.

Aplikujme práve získané poznatky na našu pôvodnú situáciu s pohárom vody a papierom. Keď už je pohár otočený hore nohami, tak zvrchu na papier pôsobí hydrostatický tlak od vody a zospodu atmosférický tlak vzduchu.[3] Ak atmosférický tlak prevyšuje hydrostatický, tak je papier dokonca tlačený mierne do pohára, čo sa v skutočnosti veľmi neprejaví, ak si dáme pozor, aby bol pohár úplne plný vody. Voda totiž nepatrí medzi dobre stlačiteľné materiály.

Uvedenú podmienku by sme vedeli zapísať ako

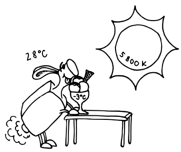
$$h\varrho g < p_a\,,$$

kde h je výška vodného stĺpca, ktorý je v pohári, ϱ je hustota vody, g je tiažové zrýchlenie a p_a je spomínaný atmosférický tlak. Z tejto rovnice vieme teda (približne) vypočítať aj to, aký najvyšší stĺpec vody môžeme na experiment použiť, aby to atmosférický tlak ešte udržal.

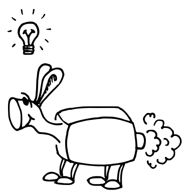
Poznámky k došlým riešeniam

Naozaj mnohí ste nedostali plných 6 bodov (ale iba 5 alebo 4) iba preto, lebo ste použili takzvané *cyklické argumentovanie*. Často ste tvrdili, že keďže papier neodpadol, tak je tlaková sila vzduchu väčšia, než tiažová sila vody. A to je spôsobené tým, že tam ten papier drží… V takomto podaní asi každý cíti, že sa tu niečo nehovorí správne. To, čo som v riešeniach najviac postrádal, bol dôkaz tvrdenia, že $p_a > h\varrho g$. Ďalej som strhával body za zle nakreslené vektory síl (šípka ukazujúca tiažovú silu musí ísť z ťažiska daného predmetu) alebo jednoducho zlý fyzikálny pohľad (napríklad „papier drží preto, lebo voda je neroztiahnuteľná“).

Jakub Bahyl
`kubo@vyfuk.mff.cuni.cz`



Řešení II. prázdninové série

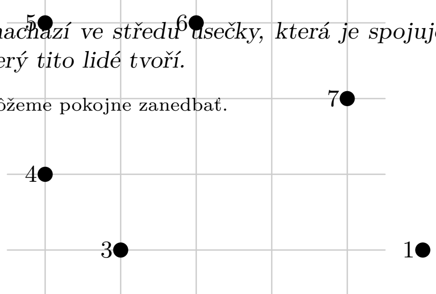


Úloha II.1 ... Frisbee

8 bodů; (chybí statistiky)

Minulé léto si na táboře Výfuku účastníci a organizátoři krátili volné chvíle tím, že se rozestavili do kruhu a házeli si s létajícím talířem. Petr popadl foťák a z okna na patře vyfotil, jak bylo 7 hráčů rozestavených (viz obrázek). Zjistěte, kde mají tito lidé společné těžiště (hmotný střed), pokud všichni váží stejně.

Pomůcka: Těžiště dvou lidí o stejné hmotnosti se nachází ve středu úsečky, která je spojuje. Těžiště tří lidí je shodné s těžištěm trojúhelníku, který tito lidé tvoří.



[3] Hmotnosť papiera je oproti vode veľmi malá, takže ju môžeme pokojne zanedbať.

V nápovědě se píše, jak zjistit polohu těžiště dvou a tří *stejně hmotných* bodů. Co když ale máme body, které nejsou stejně hmotné? Sedm bodů totiž nemůžeme bezezbytku rozdělit na dvojce, ani trojce.

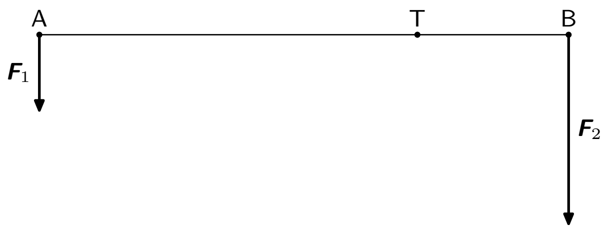
Představme si, že dva body o hmotnostech m_1 a m_2 umístíme na konce velmi lehké tyče (hmotnost tyče je tehdy zanedbatelná). Její konce si označme A a B. Jak nalezneme, kde má tato „činka" těžiště? Jednoduše se ji budeme snažit podepřít tak, aby činka byla vyvážená a nevychylovala se do stran.

Tento poznatek můžeme fyzikálně zapsat pomocí rovnováhy *momentů* působících sil, což je součin působící síly a vzdálenosti od osy otáčení. Tato vzdálenost se pak nazývá rameno síly.[4] Taková veličina pro nás může mít význam jako schopnost síly otáčet ramenem kolem osy otáčení. V našem případě se činkou pokouší otáčet dvě síly (respektive momenty sil) a to tíhové síly obou hmotných bodů, viz obrázek **??**. Poněvadž síly se snaží otočit činkou do opačných směrů, je jasné, že činka se nebude otáčet, jsou-li velikosti momentů stejné.

Zvolíme-li tedy těžiště T na úsečce AB za bod otáčení, pak moment síly $F_1 = m_1 g$ je $M_1 = F_1 d_1$ a moment síly $F_2 = m_2 g$ je $M_2 = F_2 d_2$. Pokud má platit $M_1 = M_2$, pak

$$m_1 g d_1 = m_2 g d_2 \,,$$
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{d_2}{d_1} \,.$$

Poměr vzdáleností dvou různě hmotných bodů od společného těžiště je tedy opačný jako poměr jejich hmotností. Máme-li tedy body s hmotnostmi 1 kg a 10 kg, jejich těžiště bude 10-krát blíže k těžšímu bodu než k lehčímu.



Obr. 2: Síly působící na lehkou tyč

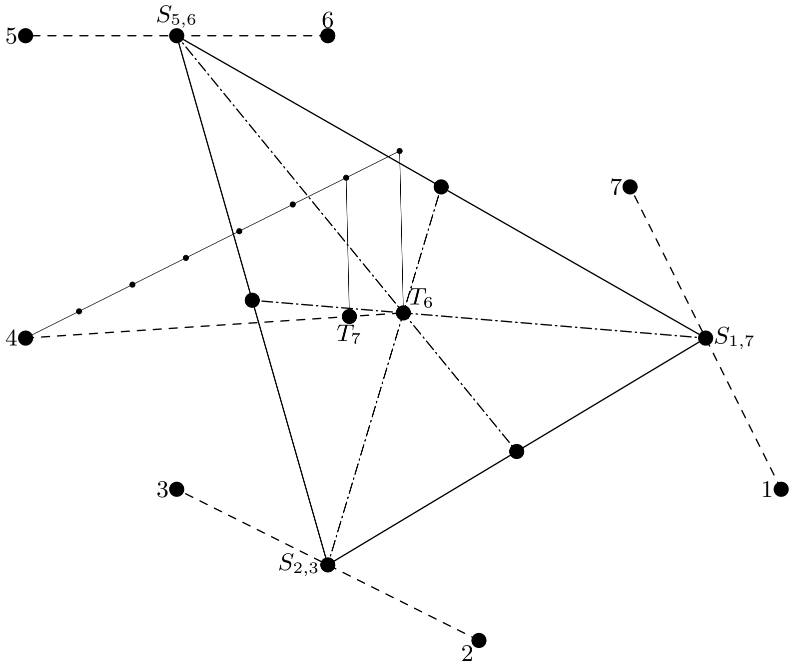
Teď už se můžeme vrhnout na vyřešení příkladu. Budeme postupovat „po částech" tak, že nějaké dva (nebo tři) body nahradíme jejich společným těžištěm o jejich společné hmotnosti, a dál už si nahrazených bodů nebudeme všímat, poněvadž jejich hmota je již soustředěna v těžišti. Postupujme jako na obrázku **??**. Vezmeme si dvojice bodů $(5, 6)$, $(1, 7)$ a $(2, 3)$ a najdeme jejich společná těžiště jakožto středy jejich spojnic S_{56}, S_{17} a S_{32}. Tyto S-body mají opět všechny stejnou hmotnost, protože každý nahrazuje 2 lidi. Jejich společné těžiště T_6 tedy bude splývat s geometrickým těžištěm trojúhelníka $S_{56}S_{17}S_{32}$.

Z poznatků o rovnosti momentů táhových sil zjišťujeme, že těžistě tří stejných bodů je vzdálené 2/3 od vrcholu a 1/3 od středu protější strany trojúhelníka, který tyto body tvoří. Důvod je ten, že těžiště dvou zbylých bodů je právě ve středu protější strany a má dvounásobnou hmonost jako bod samotný. Těžiště šesti lidí T_6 tedy opravdu zkonstruujeme jako těžiště trojúhelníku.

[4] Jednoduchý součin platí pouze pokud působící síla je kolmá na své rameno.

Nakonec nám zbyl jen jeden bod, a sice bod 4, tedy zbývá najít společné těžiště tohoto bodu a bodu T_6. Označme jej T_7 jako těžiště všech sedmi orgů.

Podle zjištěného pravidla o těžišti různě hmotných bodech má bod T_7 rozdělit úsečku $4T_6$ v poměru 1 : 6. Úsečku můžeme v daném poměru konstrukčně rozdělit užitím podobnosti. Zvolíme si s ní různoběžnou přímku v krajním bodě a naneseme na ni 7 stejných dílků, krajní body spojíme a pak se spojnicí vedeme rovnoběžku prvním dílkem. Ta úsečku rozdělí v kýženém poměru 1 : 6. A jsme hotovi.



Obr. 3: Náčrt konstrukce těžiště

Jiný způsob, jak se dobrat řešení bylo vyřešení úlohy pomocí souřadnic. Je pravda, že bychom pak potřebovali znát přesné souřadnice sedmi bodů, ale protože byla úloha zadaná jako obecných sedm bodů tvořících sedmiúhelník, tak je přípustné si je nějak zvolit.

Polohu těžiště pak určíme v soustavě dvou souřadnic x, y podle definice polohy hmotného středu. Ten je pro n bodů definovaný jako *vážený průměr* x-ových a y-ivých souřadnic jednotlivých bodů[5]

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}\,.$$

Stejně tak určíme i zbylou y-ovou souřadnici těžiště. Když nechceme zapisovat všechny složky zvlášť, jichž může být i víc, můžeme použít vektory $\boldsymbol{r_i}$ spojující počátek souřadnic a jednotlivé

[5] Vážený průměr je součet součinů dané veličiny (x-ové souřadnice) a váhy (hmotnosti), který je podělený součtem vah.