

Úloha I.V ... LHC

7 bodů; průměr 3,06; řešilo 53 studentů

Na největším světovém urychlovači, LHC, o obvodu 27 km mají letící protony energii až 7 TeV.

1. Tyto protony se v LHC pohybují až 99,95 % rychlosti světla. Kolikrát za sekundu jeden takový proton oběhne celý obvod urychlovače?
2. Částice zde dosahují energie, která bývá srovnávána s energií letícího komára. Ověřte tuto paralelu a výpočtem odhadněte kinetickou energii komára v elektronvoltech. Potřebné údaje si dohledejte a nezapomeňte uvést zdroje.
3. Jakou de Brogliovu vlnovou délku mají protony v urychlovači a jakou náš komár? De Broglieova vlnová délka je něco jako vzdálenost, která udává, jak blízko se musíme na daný předmět dívat, aby se přestal chovat tak, jak očekáváme, tedy začala platit pravidla kvantové fyziky. Měli bychom tak použít kvantovou fyziku na fyzikální popis srážky dvou protonů? A srážky dvou komárů? Proč?

Poznámka: Pro hybnost protonu použijte vzorec plynoucí z relativity $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$.

1. Tato úloha slouží především k představě rychlostí, kterými se urychlený proton pohybuje. My známe jeho rychlost, která je 99,95 % rychlosti světla fixované na číselnou hodnotu $c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, a délku okruhu, která je $l = 27 \text{ km}$. Uraženou dráhu tedy vypočítáme jako

$$s = vt = 0,9995c \cdot 1 \text{ s} \doteq 299\,642\,561,771 \text{ m}.$$

Protony tedy celý urychlovač obletí $n = s/l \doteq 11\,000$ krát.

2. Dle Wikipedie¹ váží typický komár $m = 2 \text{ mg} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ a dokáže létat rychlostí až $v = 2 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \doteq 0,56 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Při takovémto letu tedy dosahuje energie

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \doteq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot (0,56 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2 \doteq 3 \cdot 10^{-7} \text{ J}.$$

Nyní už nám zbývá jen převést tuto energii na elektronvolty, což je $E_k \doteq 1,93 \cdot 10^{12} \text{ eV} \doteq 2 \text{ TeV}$. Částice v LHC tedy mají energii jako tři až čtyři letící komáři; mají tak řádově stejnou energii a příměr je opodstatněný.

3. Abychom mohli počítat de Brogliovu vlnovou délku, potřebujeme nejdříve znát hybnost tělesa. Hybnost komára spočítáme podle známého vzorce:

$$p_k = mv = 2 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 0,56 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 1 \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1},$$

přičemž jsme se nemuseli uchylovat k relativistické fyzice, neboť komárova rychlost se zdaleka neblíží k rychlosti světla. Nyní jeho hybnost dosadíme do vzorce pro de Brogliovu vlnovou délku z Výfučení.

$$\lambda_k = \frac{h}{p} = \frac{6,636 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{1,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}} \doteq 6 \cdot 10^{-28} \text{ m}.$$

Vlnová délka komára je tedy řádově 10^{-28} m . Je o mnoho řádů menší, než vlnová délka detekovatelná dnešními technologiemi² i než komár samotný, proto komára můžeme bez problémů považovat za pevný objekt a počítat s ním podle pravidel klasické fyziky.

¹<https://cs.wikipedia.org/wiki/Kom%C3%A1rovit%C3%AD>

²Atomové jádro má řádově velikost 10^{-15} m .

Nyní se tedy podíváme na vlnovou délku protonu. Jeho hybnost spočítáme pomocí relativistického vztahu ze zadání (a musíme tak použít relativitu, neboť se rychlost blíží rychlosti světla). Když dosadíme za m hmotnost protonu a následně ostatní veličiny, obdržíme:

$$\begin{aligned} p_p &= \frac{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{c} \doteq \\ &\doteq \frac{\sqrt{(7 \cdot 10^{12} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J})^2 - (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2 \cdot (299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^4}}{299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}} \doteq \\ &\doteq 3,74 \cdot 10^{-15} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Nyní už zbývá jen dosadit do vzorce pro de Brogliovu vlnovou délku:

$$\lambda_p = \frac{h}{p_p} \doteq \frac{6,636 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{3,74 \cdot 10^{-15} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}} \doteq 1,77 \cdot 10^{-19} \text{ m}.$$

Tato vlnová délka je o 4 řády menší než rozměr protonu, tedy k relativně přesnému popisu pohybu protonu potřebujeme kvantovou mechaniku. Je to podobné, jako kdybychom u člověka, jehož délka je cca 1 metr, chtěli rozeznat předměty o délce jedné desetiny milimetru. Nemluvě o tom, že při srážce s protonem vzniknou ještě menší částice.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.