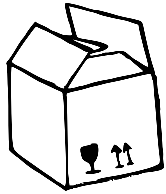
Úloha II.1 ... Uklízení

5 bodů; průměr 4,63; řešilo 27 studentů

Jindra si řekl, že konečně nastal čas na jarní úklid. Do kartonové krabice se vleze 5 kg *nestlačeného papíru. Tento papír Jindra sešlápnul na polovinu objemu a opět krabici doplnil, výsledný objem potom zase stlačil (nestlačený papír se stlačuje na polovinu, stlačený se již dále nestlačuje). Takto postup opakoval, dokud to bylo možné. Kolik* kg *papíru se v krabici nacházelo po třech opakováních? A kolik když byl Jindra s uklízením hotový (tj. když postup zopakoval hrozně mockrát)?*



Když Jindra vloží do krabice o objemu V_k nestlačený papír, vleze se do krabice přesně $m = 5\,\mathrm{kg}$, můžeme tedy říci, že hustota nestlačeného papíru je $\varrho_\mathrm{n} = m/V_\mathrm{k}$. Po stlačení zůstane hmotnost papíru stejná, ale objem bude poloviční, tudíž výsledná hustota musí být dvakrát větší, tj. $\varrho_\mathrm{s} = 2\varrho_\mathrm{n}$. Při první várce (1. přidání) mohl do zbylého objemu $V_1 = V_\mathrm{k}/2$, tedy půlky krabice, vložit nestlačený papír o hmotnosti

$$m_1 = \varrho_\mathrm{n} V_1 = \frac{m}{V_\mathrm{k}}\frac{V_\mathrm{k}}{2} = \frac{m}{2} = 2{,}5\,\mathrm{kg}\,.$$

Jakmile tento papír zase stlačí, objem úvodního papíru zůstane stejný, ale nová várka získá poloviční objem. Hustota stlačeného papíru ϱ_s bude pořád stejná. Zbylý objem v krabici bude poloviční, tedy $V_2 = V_1/2 = V_\mathrm{k}/4$. Při druhém opakování bude postup stejný, vložená hmotnost starého papíru bude

$$m_2 = \varrho_\mathrm{n} V_2 = \frac{m}{V_\mathrm{k}}\frac{V_\mathrm{k}}{4} = \frac{m}{4} = 1{,}25\,\mathrm{kg}\,.$$

Při pohledu na jednotlivé hmotnosti můžeme vidět jedno pravidlo – jsou vždy poloviční než předchozí, takže můžeme rovnou určit 3. hmotnost $m_3 = m_2/2 = m/8 = 0{,}623\,\mathrm{kg}$. Sečteme-li hmotnosti po třech opakováních (původní hmotnost + 3 přidané), bude hmotnost papíru v krabici

$$m_\mathrm{c} = m + m_1 + m_2 + m_3 = \left(5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8}\right)\mathrm{kg} = 9{,}375\,\mathrm{kg}.$$

Kolik papíru by se do krabice vešlo, pokud bychom opakovali tento postup hrozně mockrát? K tomu můžeme dojít několika různými způsoby. Například víme, že hustota stlačeného papíru se po stlačení už nemění, a tudíž by měla mít tato krabice na konci úklidu přesně tuto hustotu. Finální hmotnost starého papíru by tedy byla $m_\mathrm{f} = \varrho_\mathrm{s} V_\mathrm{k} = 2(m/V_\mathrm{k})V_\mathrm{k} = 2m = 10\,\mathrm{kg}$.

Druhý způsob řešení tohoto problému je napsat si hmotnost papíru jako nekonečnou sumu. Pro hmotnost tak dostaneme výraz:

$$m_\mathrm{f} = 5\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right)\mathrm{kg}\,.$$

Tento součet nekonečného počtu stále menších členů matematici nazývají *nekonečná řada*. Právě s touto řadou se potýkal například starověký filosof Zenón ve svém paradoxu půlení.[1] Lze dokázat, že tato nekonečná řada má konečný součet, na který jsme přišli již úvahou výše.

Nakonec jsme tedy zjistili, že po třech opakováních bude hmotnost papíru uvnitř krabice $m_\mathrm{c} = 9{,}375\,\mathrm{kg}$ a maximální dosažitelná hmotnost je $m_\mathrm{f} = 10\,\mathrm{kg}$. Tato úloha ukazuje, že chytrou

[1] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Zenónovy_paradoxy`

úvahou můžeme snadno spočítat celkové množství, aniž bychom se zajímali o dílčí hodnoty součtů a snažili se přijít na to, k čemu se postupně blíží.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.