

Úloha V.2 ... Kvadratura koberece

6 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček se rozhodl za získané peníze něco hezkého koupit, a tak se vydal na tržiště. Jeden kupec mu nabídl desetimetrový pravý létající koberec. Výfuček se však nechtěl nechat ošidit, a proto se rozhodl kupcovu tvrzení otestovat. Bohužel měl jen svinovací metr, koberec byl namotaný na tyči a nebylo možné ho v malém prostoru zakouřeného stanu roztáhnout. Výfuček si tedy změřil, že obvod tyče, na které je koberec namotán, je $o = 0,3$ m a obvod obvázaného koberece je $O = 1,7$ m. Dále si všiml, že koberec je kolem tyče omotán desetkrát. Pomozte Výfučkovi odhadnout délku koberece a ověřit tak, že kupec říká pravdu.

Pro jednoduchost předpokládejme, že jednotlivé vrstvy koberece mají tvar válcového meziválcí, tj. mezikruží „roztaženého“ do třetí dimenze. Vnitřní obvod první vrstvy je $0,3$ m a poslední vnější obvod je $1,7$ m. Obvod vrstvy je přímo úměrný jejímu poloměru s konstantou úměrnosti 2π , proto obvod vrstev směrem od středu narůstá v konstantních krocích. Koberec samozřejmě není složen z desíti oddělených válcových vrstev, následující výpočty je tedy možné považovat pouze za určité přiblížení, nicméně pro účely odhadu a řešení úlohy naprosto dostačující.

Mezi nejkratším obvodem $0,3$ m a nejdelším obvodem $1,7$ m musí ležet obvody zbývajících osmi vrstev, které se postupně zvětšují o

$$x = \frac{O - o}{9} = \frac{(1,7 - 0,3) \text{ m}}{9} = \frac{7}{45} \text{ m} \doteq 0,2 \text{ m}.$$

Vyjádríme si, že n -tá vrstva má obvod

$$0,3 \text{ m} + \frac{7}{45} \cdot (n - 1) \text{ m}.$$

Teď už můžeme dopočítat délku koberece.

Sčítáme deset členů posloupnosti. V každém z nich se objeví součet jednou $0,3$ m a pak postupně jednou, dvakrát, třikrát, ... až devětkrát $7/45$ m. Koberec je proto dlouhý zhruba

$$0,3 \text{ m} \cdot 10 + (1 + \dots + 9) \frac{7}{45} \text{ m} = 0,3 \text{ m} \cdot 10 + 45 \cdot \frac{7}{45} \text{ m} = 10 \text{ m}.$$

Výfuček se nemusí bát, jelikož délka koberece je přibližně oněch deklarovaných 10 m.

Můžeme využít i jiný postup – víme, že vrstvy zvětšují svůj obvod vždy o konstantu. Proto můžeme vrstvy spárovat do dvojic, přičemž součet obvodů ve dvojici je vždy stejný. Aby toto platilo, musíme dvojice tvořit „zvnějšku“ – první vrstvu spárujeme s desátou, druhou s devátou, ..., pátou s šestou. Každá tato dvojice má obvod 2 m a je jich 5 , celkový obvod je tedy 10 m.

Viktor Materna

materna@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.